JAN 9 - 1947

Akustische Zeitschrift

Im Auftrage der

DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT

unter Mitwirkung der

DEUTSCHEN REICHSPOST und PHYSIKAL.-TECHN. REICHSANSTALT

herausgegeben von

MARTIN GRÜTZMACHER und ERWIN MEYER

1. Lothar Cremer: Nachhallzeit und Dämpfungsmaß bei streifendem Einfall 57
2. Vilh. L. Jordan: Über die Schallschluckung von Resonatoren 77
3. Eugen Ganitta: Untersuchungen über die Schallleitung in wassergefüllten Rohren 87
4. H. Pfriem: Zur thermischen Dämpfung in Mikrophonluftspalten 103
5. Patentschau 111

Zweites Heft Fünfter Jahrgang März 1940

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

Akustische Zeitschrift

Die Zeitschrift erscheint in 6 Heften je Jahrgang. Der Bezugspreis beträgt 10.— RM. je Jahrgang. Von den Originalbeiträgen und zusammenfassenden Berichten stehen den Verfassern 30 Sonderdrucke unberechnet zur Verfügung. Weitere Exemplare werden berechnet und müssen bei Rückgabe der Fahnenkorrekturen bestellt werden

Schriftleitung:

Dr. Martin Grützmacher, Oberregierungsrat und Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

Professor Dr. Erwin Meyer, Institut für Schwingungsforschung an der Technischen Hochschule, Berlin NW. 87, Franklinstr. 1

Beiträge, sowie alle die Schriftleitung betreffenden Zuschriften werden erbeten an: Dr. Martin Grützmacher, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

WECO-DÄMMSTOFFE - DRP.

gegen Schall jeder Art und Stärke (z. T. auch Wärme) entsprechen den bisherigen Forschungsergebnissen, der neuzeitlichen Technik und den Forderungen der Praxis und Erfahrung und besitzen höchsten Dämmwert, gleichbleibende Dauerwirkung, größte Wirtschaftlichkeit, geringste Baustärke, beste Belastungsfähigkeit und weitgehende Immunität gegenüber allen normalen Einflüssen der Praxis.

Tausendfach bewährte WECO-Schalldämmungen auf Grund 25jähriger Erfahrungen im In- und Ausland, zahllose Referenzen von staatlichen, städtischen, industriellen und sonstigen Bauten und Betrieben über von uns ausgeführte Schall-Dämmungen bei Fußböden, Wänden, Auflagern, Maschinen, Fundamenten usw.

WEISS & CO, LEIPZIG C1 / Weco-Schalldämmungen - DRP.

AKUSTISCHE ZEITSCHRIFT

Zweites Heft | Fünfter Jahrgang | März 1940

Nachhallzeit und Dämpfungsmaß bei streifendem Einfall

Von L. Cremer

(Mit 8 Textabbildungen)

1. Das Nachhallproblem

In einer früheren Arbeit[1]) wurden anschließend an die allgemeinen Theorien des Nachhalls die für einen rechteckigen Raum geltenden Nachhallgesetze abgeleitet. Dabei wurde der Fall, daß sich die Wellenausbreitung nahezu parallel einer schluckenden Wand und senkrecht gegenüber gut reflektierenden Wänden vollzieht, welcher u. a. zu der bekannten Erscheinung des „Flatterechos" führt, zunächst ausgeschlossen. Die vorliegende Arbeit schließt diese Lücke.

Wie ferner in der früheren Arbeit gezeigt wurde, läßt sich der rechteckige Raum sehr gut zu einer physikalisch definierten Untersuchung des Schluckvermögens von Wandbekleidungen bei bestimmten Frequenzen und Einfallswinkeln verwenden. Der damals vorgeschlagene Raum mit schmaler Tiefe ist inzwischen gebaut worden und hat sich für derartige Versuche gut bewährt. Hierüber wird demnächst von H. Neubert an gleicher Stelle berichtet werden. Auch Hunt[2]) hat inzwischen diesen Weg eingeschlagen und derartige Messungen an einer Faserstoffplatte veröffentlicht. Auch er sah sich der Schwierigkeit gegenüber, den an sich gut meßbaren Nachhall bei streifendem Einfall auszuwerten.

Wir vereinfachen das Problem, ohne dadurch dasselbe wesentlich einzuschränken, indem wir es zweidimensional behandeln.

Physikalisch bedeutet das, daß wir in der dritten Dimension den Raum durch starre Wände abschließen, die das Feld in dieser Richtung beliebig oft spiegelbildlich fortsetzen, und daß wir uns dabei nur für solche Eigentöne interessieren, die in dieser dritten Richtung keine Ortsabhängigkeit aufweisen.

Wir setzen dementsprechend für jeden Eigenton mit der Kreisfrequenz ω und der Dämpfung δ das Potential der Schnelle an:

$$\varphi = \bar{\psi}(x, y) \cdot e^{(i\omega - \delta)t}, \tag{1}$$

wobei wir üblicherweise den Hinweis unterdrücken, daß immer der Realteil des komplexen Ausdruckes gemeint ist. (Die komplexen Größen werden wie in früheren Arbeiten hier durch Balken gekennzeichnet.) Die im Innern des Raumes geltende Wellengleichung nimmt für unseren Fall die Form an:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} = \left(\frac{i\omega - \delta}{c}\right)^2 \bar{\psi} \tag{2}$$

(c Schallgeschwindigkeit).

Der Raum sei, wie dies bei den genannten Meßräumen zutrifft, an den drei durch $x = 0$, $x = l_1$ und $y = 0$ gekennzeichneten Wänden starr abgeschlossen (siehe Abb. 1). Dadurch erhalten wir zunächst die drei einfachen Randbedingungen:

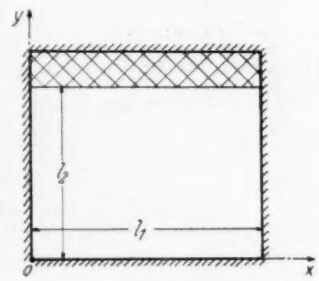

Abb. 1. Zweidimensionaler Nachhallraum

$$x = 0: \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = 0, \tag{3a}$$

$$x = l_1: \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = 0, \tag{3b}$$

$$y = 0: \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = 0. \tag{3c}$$

[1]) H. und L. Cremer, Akust. Z. 2 (1937), S. 296.
[2]) F. V. Hunt, J. Acous. Soc. Am. 10 (1939), S. 216.

Die erste und letzte hiervon wird durch den Ansatz befriedigt:

$$\bar{\psi} = \cos \bar{k}_1 x \cdot \cos \bar{k}_2 y$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(+\bar{k}_1 x + \bar{k}_2 y)} + e^{i(-\bar{k}_1 x + \bar{k}_2 y)} + e^{i(+\bar{k}_1 x - \bar{k}_2 y)}\right.$$
$$\left. + e^{i(-\bar{k}_1 x - \bar{k}_2 y)}\right). \tag{4}$$

Die Zerlegung in die vier Summanden rechts entspricht, wie schon von SCHUSTER und WAETZMANN[3]) betont wurde, vier Wellenzügen, die durch Spiegelung an den Wänden ineinander übergehen. Wie ferner in der früheren Arbeit[1]) auseinandergesetzt wurde, unterscheiden sich die hier auftretenden Wellentypen von gewöhnlichen Wellen einmal dadurch, daß überhaupt Dämpfungsexponenten auftreten und daß hierbei ferner sich die Schwächung und die Phasenänderung in verschiedenen Richtungen vollziehen, so daß innerhalb einer Ebene gleicher Phase, die wir auch in diesem Falle als Wellenfront bezeichnen wollen, nicht überall die gleiche Amplitude herrscht. Setzen wir[4])

$$\bar{k}_1 = k_1 + i\, g_1 ; \tag{5a}$$
$$\bar{k}_2 = k_2 + i\, g_2 \tag{5b}$$

so werden die Ebenen gleicher Phase gekennzeichnet durch:

$$\pm k_1 x \pm k_2 y = \text{konst.}, \tag{6}$$

während die entsprechende Gleichung für die reellen Exponenten im allgemeinen andere Ebenen

$$\pm g_1 x \pm g_2 y = \text{konst.} \tag{7}$$

liefert, die wir entsprechend als Ebenen gleicher Amplituden bezeichnen können.

Im vorliegenden Falle liefert nun die von uns noch nicht benutzte Randbedingung (3b) für $\bar{k}_1$:

$$\bar{k}_1 l_1 = n_1 \pi = k_1 l_1 ; \tag{8a}$$
$$g_1 l_1 = 0 , \tag{8b}$$

d. h. aber, daß in x-Richtung nur Phasenänderungen vorliegen. Das Ausbreitungsmaß für die y-Richtung $\bar{k}_2$ kann aber nicht in gleicher Weise reell sein wenn es überhaupt zu einer Dämpfung kommen soll. Dies ergibt sich formal sofort, wenn wir den Lösungsansatz (4) unter Beachtung der Beziehung (8) in die Wellengleichung einsetzen. Wir erhalten daraus:

$$-\left(\frac{n_1 \pi}{l_1}\right)^2 - (k_2 + i\, g_2)^2 = \left(\frac{i\,\omega - \delta}{c}\right)^2,$$

woraus die beiden Gleichungen folgen:

$$\left(\frac{n_1 \pi}{l_1}\right)^2 + k_2^2 - g_2^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{c}\right)^2 \tag{9}$$

$$k_2 g_2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)\left(\frac{\delta}{c}\right). \tag{10}$$

Gerade die letzte Gleichung zeigt, daß zur Dämpfung δ notwendig sowohl ein Dämpfungsmaß g_2 wie ein Phasenmaß k_2 in der zur Schluckwand senkrechten Richtung vorhanden sein muß. Aus $g_1 = 0$; $g_2 \neq 0$ folgt, daß die Ebenen gleicher Amplitude stets parallel zur Schluckwand sind. Die Ebenen gleicher Phase können dagegen sehr verschiedene Winkel einnehmen, aber sie können niemals, da k_2 nicht ganz verschwinden darf, senkrecht zur Schluckwand sein. Eine rein wandparallele Ausbreitung ist also nicht möglich. Dies leuchtet andererseits auch aus Energiebetrachtungen ein: Wenn die im Raum schwingende Energie in die schluckende Wand abwandern soll, so muß die Wellenfront gegen diese immer etwas geneigt sein.

Bis hierher haben wir keinerlei Vernachlässigungen nötig gehabt. Allerdings haben wir das Problem auch noch nicht gelöst, denn nun entsteht die Hauptschwierigkeit, nämlich die Größen k_2 und g_2 aus den Eigenschaften der schluckenden Wandanordnung zu ermitteln. Die durch diese Wand gegebene Randbedingung hängt im allgemeinen selbst wiederum von den Daten der durch sie beeinflußten Eigenschwingung des Raumes ab. Durch dieses Ineinandergreifen kann die allgemeine Lösung sehr verwickelt werden und hier setzen die Vernachlässigungen ein.

Zunächst wollen wir die Randbedingungen für das vorliegende Nachhallproblem gleichsetzen denen, die wir unter stationärer Einwir-

[3]) K. SCHUSTER und E. WAETZMANN, Ann. Phys. V, 1 (1929), S. 671.

[4]) In der früheren Arbeit war statt g der Buchstabe s benutzt worden. Aber da neuerdings der Schluckgrad vorzugsweise mit s bezeichnet wird, andererseits die Erdbeschleunigung im Schallfeld fast nie eine Rolle spielt, wurde der Buchstabe g gewählt, dessen Zuordnung zu k sprachlich außerdem leicht zu merken ist.

kung ($\delta = 0$) bei gleicher Frequenz zu erwarten haben. Da das Spektrum einer abklingenden Eigenschwingung bei geringer Dämpfung nur in der unmittelbaren Nähe der Eigenfrequenz starke Teiltöne zu verzeichnen hat, so läßt sich hieraus ganz allgemein abschätzen, daß diese Gleichsetzung immer dann eine gute Annäherung darstellt, wenn nicht das Wandmaterial zufällig in der Nähe dieser Frequenz eine ausgeprägte Resonanzeigenschaft aufweist. Derartige Fälle, bei denen bekanntlich die Nachhallkurve aus zwei Ästen mit verschiedener Dämpfung zusammengesetzt ist, wollen wir ausschließen. Es sei wieder angenommen, daß $\delta < 0{,}1\ \omega$ ist, was gleichbedeutend mit der einfachen Abschätzung

$$T \cdot f > 10 \tag{11}$$

ist, worin f die Frequenz und T die Sabinesche Nachhallzeit bedeutet. Hiernach dürfte selbst bei 100 Hz die Nachhallzeit einen so geringen Wert wie 0,1 sec annehmen.

Behandeln wir aber für die Wirkung auf das schluckende Material den Druck $\not p$ an der Oberfläche als sinusförmig, so müssen auch die durch ihn hervorgerufenen Bewegungen im Innern sinusförmig verlaufen. Insbesondere gilt dies auch für die wandnormale Schnelle v_n an der Oberfläche, die für die eindringende Leistung maßgebend ist. Für eine gegebene Wandanordnung und für eine bestimmte Schalldruckverteilung an der Oberfläche kann man daher beide Größen im komplexen Sinne als einander proportional ansetzen:

$$\bar{v}_n = L \cdot \bar{p}\ . \tag{12}$$

Schuster und Waetzmann [3]), welche die Randbedingung zuerst auf diese Weise formulierten, benutzten die reziproke Form:

$$\bar{p} = W \cdot \bar{v}_n \tag{12a}$$

und bezeichneten die auftretende Konstante in Analogie zur Elektrotechnik als Wandwiderstand. Paris[5]), van den Dungen[6]) u. a. benutzten den Ansatz (12), welcher auch für das im folgenden zu behandelnde Problem geeigneter ist. Sie bezeichnen den Reziprokwert des Wandwiderstandes als Admittanz, wofür wir auch „akustischer Leitwert" L sagen können.

Da das schluckende System im allgemeinen träge Massen und Federungen mit starrer Begrenzung enthält, muß, wie dies ja auch die experimentelle Erfahrung über den Frequenzgang von Schallschluckern zeigt, sicher mit einer Frequenzabhängigkeit von L gerechnet werden. Dies ist die erste Größe der zu ermittelnden Eigenschwingungen, die ihrerseits wieder in die Randbedingung eingeht. Man kann bei höheren Eigentönen diese Rückwirkung durch schrittweise Annäherung umgehen, indem man zunächst die Eigenfrequenzen des Raumes unter Annahme starrer Wand errechnet, für diese Frequenzwerte die Randbedingungen einsetzt und damit die komplexe Eigenfrequenz in erster Annäherung bestimmt.

Es liegt nun weiterhin nahe, den Leitwert als eine nur von der Frequenz abhängige Größe anzusehen, zumal sich damit die Rechnung sehr vereinfacht. Auch wir werden von diesem Ansatz Gebrauch machen. Da aber in Wirklichkeit die Drücke an der Oberfläche des schluckenden Materials verschiedene Phasen gegeneinander haben, so muß im allgemeinen damit gerechnet werden, daß durch seitliche Kopplung im Innern der Wand der Leitwert auch durch die mit anderer Phase schwingenden Nachbardrücke beeinflußt wird. Die seitliche Phasendifferenz hängt beim vorliegenden Problem von k_1 ab, ist also nach Wahl einer bestimmten Ordnungszahl n_1 ebenfalls als gegeben anzusehen.

Wenn wir, wie früher[1]) außer (11) noch annehmen, daß das resultierende Dämpfungsmaß klein gegen das resultierende Phasenmaß ist, was hier bedeutet:

$$g_2^2 \ll k_1^2 + k_2^2\ , \tag{13}$$

so gilt damit nach (9) für die Eigenfrequenz:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \approx k_1^2 + k_2^2\ . \tag{14}$$

Somit läßt sich der Sinus des Einfallswinkels ϑ, d. h. des Winkels, den die Ebenen gleicher Phase

[5]) E. T. Paris, Proc. Roy. Soc., London (A) 115 (1927), S. 407.

[6]) F. H. v. d. Dungen, Acoustique des Salles. Paris 1934.

mit der schluckenden Wand bilden, durch das Verhältnis von $k_1 : \frac{\omega}{c}$ ausdrücken:

$$\sin\vartheta = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \approx \frac{c\,k_1}{\omega}. \tag{15}$$

Wir können daher auch sagen, daß die seitliche Phasenverschiebung bei gegebener Frequenz auch vom Einfallswinkel abhängt. Es ist im allgemeinen nicht zu erwarten, daß der Leitwert für streifenden Einfall derselbe wie für senkrechten Einfall ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn wir im Inneren der schluckenden Wand so hohe akustische Widerstände haben und die Wellenlängen so groß sind, daß ein Energieaustausch zwischen Gebieten verschiedener Phase verhindert ist. Eine Grenzmöglichkeit ist hierbei die, daß zur Entkopplung sogar starre Querwände in die Wand eingezogen sind, wie das in Abb. 7d eingezeichnet ist. Hierunter fällt auch das von RAYLEIGH behandelte Kanalmodell[7]), das aus lauter senkrecht zur Wandoberfläche gerichteten luftgefüllten Kanälen besteht, deren Durchmesser klein zur Wellenlänge sind.

Aber auch wenn die Abhängigkeit des Leitwertes vom Einfallswinkel eine Rolle spielt, eignet sich die Einführung dieses Begriffes, um die Randbedingung zu formulieren. Aus dem Ansatz (4) für das Potential der Schnelle folgt für die wandnormale Schnelle bei $y = l_2$:

$$v_n = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=l_2} = -\bar{k}_2 \sin\bar{k}_2 l_2 \cos\bar{k}_1 x\, e^{(i\omega-\delta)t} \tag{16}$$

und für den Schalldruck:

$$\begin{aligned} p &= -\varrho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=l_2} \approx i\,\omega\,\varrho\,\bar{\psi}_{y=l_2}\cdot e^{(i\omega-\delta)t} \\ &= -i\,\omega\,\varrho\cos(\bar{k}_2 l_2)\cos(\bar{k}_1 x)\, e^{(i\omega-\delta)t}. \end{aligned} \tag{17}$$

(ϱ Dichte der Luft)

Durch Einführung dieser Beziehungen in die Randbedingung (12) erhalten wir die Hauptgleichung unseres Problems:

$$\frac{\bar{k}_2}{i\,\omega\,\varrho}\operatorname{tg}\bar{k}_2 l_2 = \bar{L}. \tag{18}$$

Unter Einführung des Wellenwiderstandes der Luft

$$Z = c\,\varrho \tag{19}$$

und mit einer kleinen Umformung, die besser den Anschluß an die frühere Entwicklung gibt, nimmt diese Hauptgleichung die Form an:

$$\boxed{\bar{k}_2 l_2 \mathfrak{Tg}(-i\,\bar{k}_2 l_2) = \bar{L}\,Z\left(\frac{\omega}{c} l_2\right)}. \tag{20}$$

Hierin können wir die rechte Seite mit guter Näherung als gegeben ansehen.

Entsprechend der Vieldeutigkeit des Tangens hat diese Gleichung immer unendlich viele Lösungen. Sie ergeben unendlich viele Eigenfunktionen in y-Richtung, die nach wachsenden k_2 geordnet das Gebiet von 0 bis l_2 durch $n_2 = 0, 1, 2, 3 \ldots$ absolute Minima (Knoten) unterteilen. Betrachten wir als einfachstes Beispiel den Fall, daß die Wand bei $y = l_2$ starr ist. Es verschwindet dann die rechte Seite von (20) und aus

$$k_2 l_2 \mathfrak{Tg}(-i\,k_2 l_2) = 0 \tag{21}$$

folgt:

$$\bar{k}_2 l_2 = k_2 l_2 = n_2\pi; \quad n_2 = 0, 1, 2, 3 \ldots. \tag{22}$$

Wir erhalten hierbei für die y-Richtung die gleichen Unterteilungen, wie sie der Ansatz $\cos\left(\frac{n_1\pi}{l_1} x\right)$ für die x-Richtung enthält. Immer läßt sich eine in beiden Dimensionen beliebige Anfangsverteilung des Schalldruckes aus den Eigenfunktionen zusammensetzen.

Unter „streifendem Einfall" wollen wir nun im üblichen geometrischen Sinne alle Fälle einbeziehen, bei welchen der durch die Ebenen gleicher Phase gegebene Einfallswinkel ϑ nahezu 90° beträgt, bzw. bei welchen sein Komplimentwinkel ε, den man auch als Glanzwinkel bezeichnet, sehr klein ist. Für diesen gilt nach Gleichung (6):

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{k_2}{k_1}. \tag{23}$$

Es interessieren uns also im folgenden vor allem kleine k_2-Werte, also niedrige Ordnungszahlen von n_2. Den Grenzfall

$$n_2 = 0, \tag{24a}$$

der bei starrer Wand einer reinen Ausbreitung in x-Richtung entspricht, wollen wir auch hier als wandparallele Ausbreitung bezeichnen, obschon immer eine gewisse Neigung der Wellenfront bei einer schluckfähigen Wand auftritt. Diesem Typ wird unsere Aufmerksamkeit hauptsächlich gewidmet sein.

[7]) LORD RAYLEIGH, Theory of Sound II, § 351.

Aber nicht nur dieser Grenzfall, sondern auch die Fälle

(24b) $$n_2 = 1, 2, 3, \ldots$$

können zum streifenden Einfall gerechnet werden, wenn k_1, also n_1 und somit die Frequenz sehr groß ist. Diese Fälle, die sich sogar mit der in der früheren Arbeit gegebenen Darstellung erfassen lassen, sind für die bei hohen Frequenzen mögliche „Strahlbildung" parallel zur schluckenden Wand, mit der beim „Flatterecho" gerechnet werden muß, von Bedeutung.

2. Stationäre Schallausbreitung in einem mit Schluckstoffen ausgekleideten Kanal

Bevor wir unsere Hauptgleichung auf die einzelnen Fälle anwenden, wollen wir uns einem anderen Problem zuwenden, das dem geschilderten sehr verwandt und gleichfalls von großer praktischer Bedeutung ist. Denken wir uns den in Abb. 1 gezeichneten Raum an seinen starren Wandflächen immer wieder gespiegelt, so entsteht ein Kanal von der lichten Weite $2l_2$ und beliebiger Länge, der an zwei gegenüberliegenden Längsseiten mit schallschluckendem Material ausgekleidet ist. Es ist bekannt, daß derartige Kanäle sehr geeignet sind, Schall zu vernichten, und dabei doch einer Gleichströmung, die durch sie hindurchtreten muß, nur einen verhältnismäßig geringen Widerstand entgegensetzen.

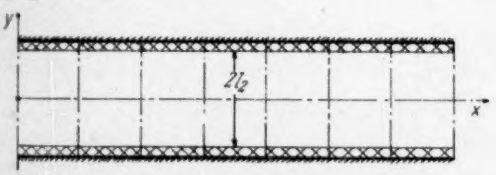

Abb. 2. Zweidimensionaler Dämpfungskanal, durch Spiegelung aus Abb. 1 entstanden

In diesem Fall interessiert nicht der Nachhall, sondern vielmehr der stationäre Ausbreitungsvorgang. Gegeben ist hier der Schalldruckverlauf in der Eingangsfläche bei $x = 0$ in Abhängigkeit von y und von der Zeit. Den Zeitverlauf können wir in reine Töne zerlegen. Ferner können wir wieder die Ortsabhängigkeit in das Produkt einer nur von x und einer nur von y abhängigen Funktion aufspalten, wobei für die Abhängigkeit in x-Richtung eine einfache gedämpfte Wellenausbreitung herauskommt. Wir zerlegen also das gesamte Problem in Lösungsbestandteile der Form:

(25) $$\varphi = \bar{\psi}_2(y)\, e^{-i(k_1 - i g_1)x}\, e^{i\omega t}.$$

Für die Funktion $\bar{\psi}_2(y)$ folgt aus der Wellengleichung die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

(26) $$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial y^2} - (k_1 - i g_1)^2 \bar{\psi}_2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \bar{\psi}_2.$$

Daraus folgt für $\bar{\psi}_2$ der allgemeine Ansatz:

(27) $$\bar{\psi}_2 = C \cos \bar{k}_2 y + D \sin \bar{k}_2 y$$

und indem wir uns — entsprechend der starren Wand bei $y = 0$ im früheren Problem — nur mit solchen Schallverteilungen befassen, die zur Kanalmitte symmetrisch sind, folgt:

(28) $$y = 0: \quad \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial y} = 0: \quad D = 0.$$

Die übrigbleibende Konstante C setzen wir wie im ersten Kapitel gleich 1, so daß nunmehr unsere Lösungsform lautet:

(29) $$\varphi = \cos \bar{k}_2 y \cdot e^{-i(k_1 - i g_1)x} \cdot e^{i\omega t}.$$

Das Ausbreitungsmaß für die Querrichtung $\bar{k}_2$, das auch hier, um die aus der Differentialgleichung (26) folgende Bedingung:

(30) $$-\bar{k}_2^2 - (k_1 - i g_1)^2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

zu erfüllen, komplex angesetzt werden muß, ergibt sich wieder aus der Randbedingung bei $y = l_2$, die auch hier durch einen vorgeschriebenen Wandleitwert dargestellt werden kann. Wir werden dabei zur früheren Hauptgleichung (20) geführt, denn bei der Quotientenbildung aus der wandnormalen Schnelle und dem dort herrschenden Druck heben sich alle diejenigen Faktoren fort, die in (29) von dem früheren Ansatz (4) abweichen. Wie wir unten noch besprechen werden, kann dabei die rechte Seite der Hauptgleichung wieder als vorgegeben angesehen werden.

Vergleichen wir nun das zweite Problem mit dem ersten, so erkennen wir zunächst, daß k_1 und ω ihre Rollen vertauscht haben. Früher war k_1 durch Wahl einer bestimmten Ordnungszahl n_1 gegeben, dagegen ergab sich die Eigenfrequenz aus der Rechnung. Hier können wir

umgekehrt ω wählen, während die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Kanalrichtung, die durch k_1 gekennzeichnet ist, gesucht wird. Die zweite Parallele bezieht sich auf g_1 und δ. Früher hatten wir parallel zur schluckenden Wand kein Dämpfungsmaß, dafür aber ein Abklingen mit der Zeit; jetzt haben wir stationäre Vorgänge, dafür aber ein Dämpfungsmaß längs des Kanals.

Die nähere Betrachtung zeigt aber, daß die formelle Analogie der beiden Probleme nur unter gewissen Einschränkungen vollkommen ist. Auch wenn wir annehmen, daß k_2 und g_2 in beiden Fällen aus der gleichen Hauptgleichung bestimmt werden, so ergeben sich doch für die jeweils gesuchten Größen ω, δ bzw. k_1, g_1 andere Beziehungen. Trennen wir nämlich in Gleichung (30) Real- und Imaginärteil und beachten dabei zum Vergleich mit Gleichung (9) und (10) die besprochene Rollenvertauschung der einzelnen Größen, so lauten die zu (9) und (10) analogen Beziehungen:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_2^2 + g_2^2 = k_1^2 - g_1^2 , \tag{31}$$

$$k_2 g_2 = k_1 g_1 . \tag{32}$$

Man erkennt zunächst, daß an der zweiten Gleichung, die Gleichung (10) entspricht, sinngemäß sich nichts geändert hat, indem k_1 und g_1 an die Stelle von $\frac{\omega}{c}$ und $\frac{\delta}{c}$ getreten sind. In der ersten Gleichung dagegen hat der Einfluß von k_2 und g_2 sein Vorzeichen gewechselt. Während früher eine Vergrößerung von k_2, also eine Erhöhung der Ordnungszahl n_2 nur eine entsprechende Erhöhung der Eigenfrequenz zur Folge hatte, bewirkt diesmal die Erhöhung der Ordnungszahl eine Verkleinerung des Phasenmaßes gegenüber dem Dämpfungsmaß in Kanalrichtung.

Diese Wirkung tritt, wie Lord RAYLEIGH[8]) bereits zeigte, auch im ungedämpften Kanal auf. Nehmen wir nämlich die Wände als starr an, so geht unser obiger Lösungsansatz (29) über in:

$$\varphi = \cos \frac{n_2 \pi}{l_2} y \cdot e^{-i k_1 x} \cdot e^{i \omega t} \tag{29a}$$

und aus (31) wird:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n_2 \pi}{l_2}\right)^2 = k_1^2 . \tag{31a}$$

[8]) LORD RAYLEIGH, Theory of Sound II, § 268.

Da nun ω gegeben ist und wir zur Darstellung einer beliebigen Druckverteilung im Anfangsquerschnitt im allgemeinen auch Lösungsbestandteile mit beliebig hohen n_2-Werten betrachten müssen, so ergibt sich dabei stets eine Grenze, von welcher ab die linke Seite negativ wird. Das bedeutet, daß immer nur die Lösungsbestandteile mit niedrigen k_2-Werten einer Wellenausbreitung durch einen derartigen Kanal fähig sind; die höheren werden dagegen exponentiell geschwächt und zwar um so stärker je höher die Ordnungszahl ist, ohne daß damit ein Energieverlust verbunden ist. Die Querverteilung erleidet daher bei der Ausbreitung eine Verzerrung, die entsprechend dem Ausfall an Eigenfunktionen höherer Ordnung eine Abrundung des Feldbildes bedeutet.

Dieselbe Erscheinung ist auch im vorliegenden Problem bei schluckenden Seitenwänden enthalten. Die Querunterteilungen vom höheren Grade haben auch hier nur eine beschränkte Reichweite und dies hat nicht nur seine Ursache darin, daß die zugehörigen stärker gegen die Wand geneigten Wellenzüge durch häufigere Reflexionen mehr geschwächt werden. Für die Schallausbreitung in einem engen und langen Kanal interessieren daher immer nur die Wellenzüge streifenden Einfalls. Ist speziell die Wellenlänge sogar groß gegenüber der Kanalbreite, so interessiert sogar nur der als „wandparallele Ausbreitung" gekennzeichnete Lösungsanteil.

Die Gleichungen (9) und (31) gehen erst dann ineinander über, wenn wir in (9) voraussetzen, daß

$$\left|k_2^2 - g_2^2\right| \ll \left(\frac{n_1 \pi}{l_1}\right)^2 \tag{33}$$

und in (31) daß:

$$\left|k_2^2 - g_2^2\right| \ll \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{34}$$

ist. Im ersten Problem bedeutet das, daß die Eigenfrequenz nahezu einer ungedämpften Eigenschwingung in x-Richtung entspricht; im zweiten Problem besagt es, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit längs des Kanals nahezu gleich der Schallgeschwindigkeit im Freien ist. Diese Bedingungen sind um so eher erfüllt, je höher die Frequenz und je kleiner k_2 ist, also vorzugsweise bei streifendem Einfall.

Noch in einem zweiten Punkt unterscheiden sich die beiden Probleme. Um den Wandleitwert als vorgegebene Größe ansehen zu können, mußten wir früher annehmen, daß $\delta \ll \omega$ ist. Die entsprechende Einschränkung würde hier lauten:

(35) $$g_1 \ll k_1 .$$

Dieselbe ergibt sich als notwendig, wenn wir bei Berücksichtigung der seitlichen Kopplung in der Wand beachten, daß die Drücke an verschiedenen Stellen der Oberfläche nicht nur eine durch k_1 gegebene Phasenverschiebung, sondern auch eine durch g_1 gegebene Dämpfung aufweisen. Würden wir hier ebenso fordern, daß

(35a) $$g_1 \leq 0{,}1\, k_1$$

ist, so würde das unter Beschränkung auf streifenden Einfall bedeuten, daß die Dämpfung D längs des Kanales in db/m der Einschränkung

(35b) $$D \leq 1{,}6 \cdot 10^{-2} f$$

unterworfen ist. Hiernach dürften wir bei 2000 Hz noch $32\,db/m$, dagegen bei 200 Hz nur 3,2 und bei 50 Hz noch nicht einmal 1 db/m zulassen. Dies würde eine praktisch sehr wichtige Einschränkung der Gültigkeit unserer Rechnungen sein. Doch kommt uns hier der Umstand zu Hilfe, daß gerade bei tiefen Frequenzen im allgemeinen die akustischen Widerstände im Innern der Wandbekleidung so groß sind, daß auf die seitliche Kopplung ohnehin keine Rücksicht genommen werden muß. Durch diesen Wegfall der Einschränkung (35) erstreckt sich unsere Behandlungsmethode auch auf Bereiche tiefer Frequenzen und hoher Dämpfungen beim Kanalproblem, welche beim Nachhallproblem nicht mehr interessieren.

3. Die Lösung für tiefe Frequenzen

In zwei Grenzfällen bietet die Hauptgleichung (20) eine einfache und physikalisch durchsichtige Lösung. Der erste Fall, dem wir uns zunächst zuwenden, tritt ein, wenn die rechte Seite in Gleichung (20) klein ist, d. h. also wenn:

(36) $$\left| L Z \left(\frac{\omega}{c} l_2\right) \right| \ll 1$$

ist. Dies ist bei gegebenem Wandleitwert schließlich immer der Fall, wenn:

(36a) $$l_2 \ll \lambda$$

(λ Wellenlänge)

ist, wenn also die Frequenz sehr tief ist. Dieser Bereich erstreckt sich ferner um so höher hinauf, je kleiner der Wandleitwert gegenüber dem Wellenleitwert der Luft bleibt:

(36b) $$L \ll \frac{1}{Z} .$$

Im allgemeinen, insbesondere bei porösen Schallschluckern, gilt auch die zweite Ungleichung vorzugsweise bei tiefen Frequenzen. Nur in dem Falle, daß der Leitwert umgekehrt proportional der Frequenz ist, welcher aber praktisch nicht vorkommt, würde der durch die Ungleichung (36) gekennzeichnete Bereich bei tiefen Frequenzen nicht anzutreffen sein.

Mit der Beschränkung auf tiefe Frequenzen ergibt sich meist auch, daß die seitliche Kopplung in der Wand vernachlässigt werden kann.

Wir wollen außerdem nur die wandparallele Ausbreitung, also den niedrigsten k_2-Wert k_{20}, den die Hauptgleichung (20) liefert, betrachten. Dann wird auch nach (20):

(37) $$|k_{20} l_2| \ll 1 .$$

Wir können somit den Tangens durch sein Argument ersetzen. Physikalisch heißt das, daß in beiden Problemen der Schalldruck über dem Querschnitt konstant ist:

(38a) $$\bar{p} = -i\,\omega\,\varrho\,\bar{\psi}_1(x) \cos \bar{k}_{20}\, y \approx -i\,\omega\,\varrho\,\bar{\psi}_1(x)$$

und daß die y-Komponente der Schnelle gegen die schluckende Wand hin linear mit y anwächst:

(38b) $$\bar{v}_y = -\bar{k}_{20}\bar{\psi}_1(x) \sin \bar{k}_{20}\, y \approx -(\bar{k}_{20})^2 \bar{\psi}_1(x) \cdot y .$$

Die Hauptgleichung, die hier die Form annimmt:

(39) $$-i\,(k_{20} l_2)^2 = L Z \left(\frac{\omega}{c} l_2\right)$$

läßt sich unter Einführung der Wirk- und Blindkomponente des Wandleitwertes:

(40) $$L = A + i\,B$$

aufspalten in:

(41) $$g_{20}^2 - k_{20}^2 = B Z \left(\frac{\omega}{c} l_2\right),$$

(42) $$2\,k_{20}\,g_{20} = A Z \left(\frac{\omega}{c} l_2\right).$$

Bis hierher unterscheiden sich die beiden Probleme nicht.

Wir wenden uns zunächst dem Nachhall zu und erhalten dabei für die Dämpfung δ durch Kombination der Gleichungen (42) und (10) die sehr einfache Beziehung:

$$\delta_{90} = \frac{c}{2\,l_2} \cdot A_{90} Z \,. \tag{43}$$

(Der Index 90 soll auf die wandparallele Ausbreitung $\vartheta = 90^0$ hinweisen.) Diese Formel liefert uns die gesuchte Beziehung zwischen der bei wandparalleler Ausbreitung gemessenen Nachhalldauer und einer Eigenschaft des untersuchten Schluckstoffes. Sie kann für dieses Problem allgemeine Gültigkeit beanspruchen, da eine Messung des Nachhalls von Eigentönen ohnehin nur bei kleinen Nachhallzeiten und verhältnismäßig niedrigen Frequenzen möglich ist. Sie besagt, daß der Meßraum nur durch die Größe l_2 eingeht. Es leuchtet ein, daß mit Verringerung dieser Dimension der dämpfende Einfluß der schluckenden Wand sich vergrößern muß. Die gleiche Entfernung geht ja auch bei der Auswertung aller anderen Eigentöne ein.

Sehr interessant ist nun der Vergleich der Formel (43) mit demjenigen Nachhall, der bei gleicher Frequenz und im gleichen Raume, aber bei senkrechtem Einfall zu erwarten ist.

Hierbei können wir auf die eingangs erwähnte frühere Arbeit[1]) zurückgreifen und auf eine neue Ableitung aus den im ersten Kapitel gegebenen allgemeinen Gleichungen verzichten. Dort wurde gezeigt, daß, abgesehen vom streifenden Einfall, die wellentheoretische Behandlung auf die gleichen Ergebnisse wie die einfache Strahlenbetrachtung führt. Dabei wird die Nachhallzeit primär durch den Schluckgrad s (d. i. von der Wand verschluckte Energie zur aufgefallenen) bestimmt. Bei der gegebenen Anordnung erfährt die unter dem Einfallswinkel ϑ auftreffende Welle von der Stärke J immer erst nach Durchlaufen einer Wegstrecke $2\,l_2/\cos\vartheta$ einen Verlust um $s\,J$. Die Gegenüberstellung

$$J\,(1-s) = J \cdot e^{-2\frac{\delta}{c}\cdot\frac{2l_2}{\cos\vartheta}}$$

ergibt

$$\delta = \frac{c\cos\vartheta}{4\,l_2}\,(-\ln(1-s)) \approx \frac{c\cos\vartheta}{4\,l_2}\cdot s\,. \tag{44}$$

(Ein Spezialfall der Formel (7) der früheren Arbeit[1])).

Wir drücken nun den Schluckgrad durch den Wandwiderstand bzw. Wandleitwert aus, wobei wir auf die bereits mehrfach erwähnte Arbeit von Schuster und Waetzmann[3]), bzw. ebenfalls auf Ausführungen der früheren Arbeit[1]) zurückgreifen können. Trifft eine ebene Welle mit der Amplitude 1 und Phase 0 auf eine Wand mit dem Widerstand $\overline{W}$, bzw. dem Leitwert $\bar{L}$, so verläßt sie diese im allgemeinen sowohl mit der kleineren Amplitude R als auch mit einem Phasensprung γ[9]), welche sich ergeben aus:

$$R \cdot e^{i\gamma} = \frac{\overline{W}\cos\vartheta - Z}{\overline{W}\cos\vartheta + Z} = \frac{\cos\vartheta - \bar{L}\,Z}{\cos\vartheta + \bar{L}\,Z}\,. \tag{45}$$

Da nun definitionsgemäß

$$s = 1 - R^2 \tag{46}$$

ist, folgt für den Schluckgrad:

$$s = 1 - \left|\frac{\cos\vartheta - \bar{L}\,Z}{\cos\vartheta + \bar{L}\,Z}\right|^2 = \frac{4\,A\,Z\cos\vartheta}{(\cos\vartheta + A\,Z)^2 + (B\,Z)^2} \tag{47}$$

und speziell für senkrechten Einfall:

$$s_0 = \frac{4\,A_0 Z}{(1 + A_0 Z)^2 + (B_0 Z)^2}\,. \tag{47a}$$

Darin können wir bei nicht zu großem Schluckgrad im Einklang mit der bereits in (44) gemachten Vernachlässigung setzen:

$$A_0 Z \ll 1\,. \tag{48a}$$

Ebenso ist in dem interessierenden Bereich praktisch immer erfüllt:

$$B_0 Z \ll 1\,, \tag{48b}$$

so daß wir aus (44) und (47) erhalten:

$$\delta_0 = \frac{c}{l_2}\,[A_0 Z]\,. \tag{49}$$

Nehmen wir nun noch an, daß der Wandleitwert unabhängig vom Einfallswinkel ist, daß also keine seitliche Kopplung in der Wand auftritt, wie das bei porösen Schallschluckern im Bereich tiefer Frequenzen ebenfalls zutrifft, so lassen sich (49) und (43) unmittelbar vergleichen und wir erhalten das bemerkenswerte Ergebnis:

Die Nachhallzeit bei streifendem Einfall ist im Bereich tiefer Frequenzen nur

[9]) γ ist hier im Gegensatz zu früheren Arbeiten mit positivem Vorzeichen eingesetzt, da wir uns nicht nur auf poröse Schallschlucker beschränken wollen, bei welchen der Phasensprung meist negativ ist.

doppelt so groß, wie diejenige bei senkrechtem Einfall.

Um das entsprechende Ergebnis für das Kanalproblem zu erhalten, welches unter den in diesem Kapitel gemachten Einschränkungen bereits von BOSQUET[10]) und später von SIVIAN[11]) gelöst wurde, brauchen wir in Gleichung (43) nur δ sinngemäß durch $g_1 \cdot c$ zu ersetzen:

$$g_1 = \frac{1}{2\,l_2} A Z . \tag{50}$$

Da bei den meisten Wandanordnungen, insbesondere bei porösen Schallschluckern, der Wandleitwert mit der Frequenz wächst, so ist in der einfachen Gleichung (50) auch die bekannte Tatsache enthalten, daß derartige mit Schluckstoff ausgekleidete Kanäle nach tiefen Frequenzen hin in ihrer Wirkung abfallen.

Ein solcher Abfall tritt aber, wie SIVIAN zeigte, aus einem anderen Grunde auch dann ein, wenn man einen frequenzunabhängigen Wandleitwert annehmen würde, welcher praktisch freilich bisher nicht realisierbar ist. Er erfolgt dann nämlich in demjenigen Bereich, in welchem nicht mehr $g_1 \ll k_1$ und somit die Analogie der beiden Probleme nicht mehr vollkommen ist. Kombinieren wir Gleichung (41) und (42) mit Gleichung (31) und (32), so ergeben sich die beiden Beziehungen:

$$k_1^2 - g_1^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + B Z \left(\frac{\omega}{c\,l_2}\right), \tag{51}$$

$$2\,k_1 g_1 = A Z \left(\frac{\omega}{c\,l_2}\right). \tag{52}$$

Nur mit den für die Analogie notwendigen Einschränkungen (34) und (35) folgt in (51) $k_1 \approx \left(\frac{\omega}{c}\right)$ und somit aus (52) die einfache Beziehung (50). Nehmen wir dagegen an, daß

$$\frac{A Z}{\left(\frac{\omega}{c} l_2\right)} \text{ und } \frac{B Z}{\left(\frac{\omega}{c} l_2\right)} \text{ nicht mehr klein gegen 1} \tag{53}$$

sind, so ergibt sich aus (51) und (52) für g_1 die weit verwickeltere Beziehung:

$$g_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\beta)^2 + \alpha^2} - (1+\beta)}{2}}, \tag{54}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{A Z}{\left(\frac{\omega}{c} l_2\right)} = \alpha , \tag{55a}$$

$$\frac{B Z}{\left(\frac{\omega}{c} l_2\right)} = \beta . \tag{55b}$$

Setzt man hierin z. B. $\beta = 0$ und nimmt man $\alpha \gg 1$ an, so ergibt sich:

$$g_1 = \sqrt{\frac{\omega A Z}{2\,c\,l_2}}, \tag{56}$$

also trotz konstanten Wandleitwertes ein Anstieg mit der Frequenz.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die durch (53) gekennzeichneten Fälle mit der zu Anfang dieses Kapitels gemachten Einschränkung (36) nicht in Widerspruch stehen. Wenn L groß ist, kann der ganze für (36) in Frage kommende Frequenzbereich die allgemeine Formel (54) verlangen. Bei kleinen L-Werten wird es freilich fraglich, ob diejenigen tiefen Frequenzen, für welche (50) nicht mehr gilt, überhaupt noch interessieren.

Zur Ableitung dieser Ergebnisse bediente sich SIVIAN[11]) einer anderen Darstellung, die zwar den Nachteil hat, grundsätzlich nur für tiefere Frequenzen anwendbar zu sein, andererseits aber beliebige Querschnittsformen des Kanals umfaßt. Sie beruht darauf, daß wir im vorliegenden Bereich den Druck und somit auch die Dichte über die ganze Kanalbreite als konstant ansehen können. Dadurch können wir in einfacher Weise das dynamische Grundgesetz und die Kontinuitätsgleichung auf ein Volumen-

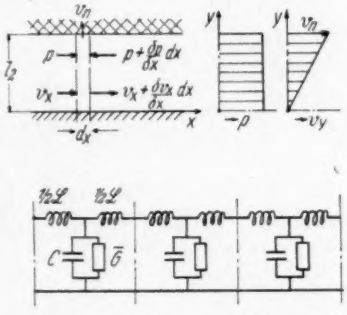

Abb. 3.
a) Oben: Skizze zur Lösung bei tiefen Frequenzen Querverteilung von Druck und wandnormaler Schnelle
b) Unten: Elektrisches Analogon (nach SIVIAN)

element anwenden, das durch zwei im Abstande dx quer durch den Kanal gelegte Flächen von der Größe F und durch die schluckende Mantelfläche $U \cdot dx$ begrenzt ist, wobei U den Umfang des Kanales bedeutet (siehe Abb. 3a) Die dynamische Grundgleichung lautet dann:

$$-F \frac{\partial p}{\partial x} dx = (\varrho F\, dx) \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} . \tag{57}$$

[10]) BOSQUET, Bull. Techn. Assoc. Ing. Bruxelles 31 (1935), Nr. 12.

[11]) L. J. SIVIAN, J. Acous. Soc. Am. 9 (1937), S. 135.

Die Kontinuitätsgleichung besagt, daß der Überschuß an sekundlich hereinströmender Materie nur z. T. zu einer Erhöhung der Dichte und somit des Druckes führt, z. T. durch die am Umfang mit der Schnelle v_n ausströmende Materie verloren geht:

$$(58) \quad -\varrho F \frac{\partial v_x}{\partial x} dx = F dx \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \varrho U dx \cdot v_n .$$

Indem wir diese Beziehungen auf reine Töne anwenden und außerdem den Wandleitwert entsprechend Gleichung (12) einführen, erhalten wir ein Gleichungssystem, wie es völlig analog bei dem in Abb. 3b skizzierten elektrischen Ersatzschema auftritt, wobei wir nur üblicherweise die Induktivität durch ϱ/F, die Kapazität durch $\frac{F}{c^2 \varrho}$ und den elektrischen Leitwert G durch den akustischen Wandleitwert L zu ersetzen haben. Aus der Kombination der Gleichungen (57), (58) und (12), oder unter Benutzung der elektrischen Analogie und Anwendung bekannter Formeln der Schwachstromtechnik folgt für das komplexe Ausbreitungsmaß:

$$(59) \quad i k_1 + g_1 = \sqrt{\frac{i \omega \varrho}{F} \left(\frac{i \omega F}{c^2 \varrho} + U (A + i B) \right)} .$$

Die Quadrierung dieser Gleichung führt unmittelbar auf unsere oben gegebenen Ergebnisse (51) und (52), wobei wir das in SIVIANS Formeln eingehende Verhältnis von Fläche zum Umfang durch l_2 zu ersetzen haben.

Schließlich wollen wir noch in die Formel (50) den Schluckgrad für senkrechten Einfall s_0 einsetzen, indem wir wie oben von einer seitlichen Kopplung im Innern der Wand absehen. Wir drücken ferner das Dämpfungsmaß wie meist üblich in $\frac{db}{m}$ aus und erhalten somit die Beziehung:

$$(60) \qquad D = 20 \log e \cdot g_1 = 1{,}1 \frac{U s_0}{F} .$$

Diese Formel deckt sich, abgesehen von einer Abweichung im Zahlenfaktor mit einer bereits von PIENING [12]) empirisch angegebenen Formel:

$$(60a) \qquad D = 1{,}5 \frac{U s_0}{F} .$$

Diese Form der Darstellung hat den Vorzug, daß an Stelle des etwas abstrakt anmutenden Wandleitwertes, der in der Raumakustik geläufige und ins praktische Gefühl eingegangene Begriff des Schluckgrades verwendet wird.

4. Die „Strahlbildung" bei hohen Frequenzen

Das im letzten Kapitel für tiefe Frequenzen erhaltene Ergebnis, nämlich daß die Nachhallzeit bei der Ausbreitung parallel zur schluckenden Wand nur doppelt so groß ist als bei senkrechtem Auftreffen, steht im Widerspruch mit den elementaren, geometrischen Strahlenbetrachtungen, wie sie meist bei der Ableitung der Nachhallgesetze herangezogen werden. Hiernach wäre nicht einzusehen, warum ein „Schallstrahl", der etwa in der Mitte des Raumes parallel zur schluckenden Oberfläche entsandt wird, überhaupt durch dieselbe beeinflußt werden sollte. Seine Intensitätsabnahme müßte lediglich durch das Divergieren der Energie bei der Verbreiterung der Wellenfront, durch endliche Schluckfähigkeit der zunächst als starr angenommenen Abschlußwände und durch die insbesondere bei den höheren Frequenzen in Erscheinung tretende Absorption in der Luft bewirkt sein.

Ferner kann man bei den ausgekleideten Kanälen beobachten, daß ihre Wirkung nach hohen Frequenzen wieder abfällt. Man führt auch dieses (meistens sogar ausschließlich) darauf zurück, daß bei hohen Frequenzen die in der Mitte durchtretenden Wellenanteile einen Strahl bilden können, dessen Kern so viele Wellenlängen von den dämpfenden Wandungen entfernt ist, daß er durch sie nicht beeinflußt wird. In der Tat hat man, wenn man sich durch ein derartiges ausgekleidetes Rohr mit einem Partner unterhält, den Eindruck, daß die Zischtöne der Sprache ungeschwächt auf direktem Wege herübergelangen. Auch in schalltoten Meßräumen haben JANOWSKY und SPANDÖCK [13]) festgestellt, daß die in der Nähe der schluckenden Flächen sich ausbreitenden Wellen zwar zunächst mit wachsender Frequenz stärker gedämpft werden, daß aber auch hier die Dämpfung bei hohen Frequenzen wieder

[12]) W. PIENING, VDI.-Z. 81 (1937), S. 776. Die Abweichung erklärt sich nach (47a) daraus, daß s_0 bei etwas größeren Wandleitwerten merklich kleiner als $4 A_0 Z$ wird.

[13]) W. JANOWSKY und F. SPANDÖCK, Akust. Z. 2 (1937), S. 322.

abfällt, wenn ein Sender benutzt wird, der zur „Strahlbildung" bei hohen Frequenzen neigt.

Diese „Strahlbildung" muß als Grenzfall für hohe Frequenzen auch in der hier angegebenen wellentheoretischen Darstellung enthalten sein. Da in diesem Bereich die beiden Probleme formal völlig übereinstimmen, so bleibt es an sich gleichgültig, welchem wir uns zuwenden. Beim Nachhallproblem würde vor allem das Flatterecho interessieren, welches auf einen an einer Stelle erzeugten Knall folgt. Hierbei hätten wir eine Anfangsverteilung zu untersuchen, die sowohl in Quer- als in Längsrichtung nur in einem kleinen Bereich einen endlichen Schalldruck aufweist. Man würde dann das Problem nach den verschiedenen n_1-Werten unterteilen und hätte dabei in x-Richtung jeweils eine Kosinusverteilung, dagegen in y-Richtung zunächst noch die gleiche Anfangsverteilung. Jedes einem bestimmten n_1 zugeordnete Teilproblem entspricht nun übertragen auf die stationäre Ausbreitung im Kanal einer stationären Anregung mit bestimmter Frequenz bei gleicher Querverteilung. Da diese zweite Problemstellung bereits für sich eine physikalische Existenzberechtigung hat, so möge das Problem der Strahlbildung an Hand der Ausbreitung im Kanal erläutert werden. Aus dem Gesagten folgt die sinngemäße Übertragung auf das Flatterecho.

Die analytische Formulierung für einen Strahl lautet hierbei:

$$\lim_{\omega\to\infty} \bar{\psi}(x, y) = \bar{\psi}_0(y) \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}x}. \tag{61}$$

Sie bringt zum Ausdruck, daß die wirkliche Ausbreitung sich bei sehr hohen Frequenzen nur wenig davon unterscheiden darf, daß eine vorgegebene Querverteilung $\bar{\psi}_0(y)$ mit Schallgeschwindigkeit durch den Kanal entlangläuft. Da wir nun die Lösung zusammensetzen in der Form (29):

$$\bar{\psi}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_{2n} y) \cdot e^{-i k_{1n} x}, \tag{62}$$

so erhalten wir den Übergang zur Strahlfunktion (61) durch die spezielle Bedingung:

$$\lim_{\omega\to\infty} k_1 = \frac{\omega}{c}. \tag{63}$$

(Da eine Verwechslung mit n_1 nicht möglich ist, schreiben wir hier und im folgenden statt n_2 einfach n.)

Als einfaches Beispiel wollen wir uns zunächst klarmachen, wie dieser Grenzübergang beim Kanal mit starren Seitenwänden zustande kommt. Der Fall, daß die Anregung quer über dem ganzen Kanal konstant ist, würde hierbei trivial sein, da er bei beliebiger Frequenz zur ebenen Welle führt, welche als Spezialfall des allgemeinen Strahlenansatzes (62) angesehen werden kann. Wir wollen statt dessen annehmen, daß am Eingang eine Kolbenmembran schwingt, die nur die halbe Breite 2b des Kanales einnimmt (siehe Abb. 4), während die übrige starre Querfläche in Ruhe bleibt. Bereits aus Abstrahlungsgründen ist zu verlangen, daß

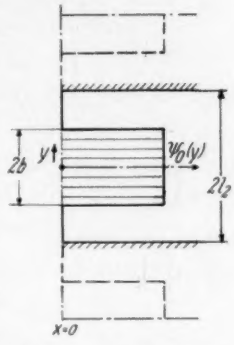

Abb. 4. Anfangsverteilung zur Strahlbildung im starr begrenzten Kanal

$$2b \geqslant \lambda \tag{64a}$$

und somit auch

$$2l_2 \geqslant \lambda \tag{64b}$$

ist, wenn von dieser Membran eine nahezu ebene Welle ausgehen soll. Da die Querfunktionen in diesem Falle (vgl. Ansatz (29a)) eine FOURIERsche Kosinusreihe bilden, haben wir anzusetzen:

$$\bar{\psi}(x, y) = \frac{\psi_0}{2}\left[e^{-i\frac{\omega}{c}x} + \frac{4}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{l_2}y\right)e^{-ik_{11}x} - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi}{l_2}y\right)e^{-ik_{13}x} + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi}{l_2}y\right)e^{-ik_{15}x}\ldots\right)\right]. \tag{65}$$

Die zu den einzelnen Summanden gehörigen Wellenzahlen k_{1n} finden wir nach (31a) aus:

$$k_{1n} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{l_2\omega}\right)^2}. \tag{66}$$

Diese Beziehung erfüllt den in (63) geforderten Grenzübergang.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns unserem eigentlichen Problem zu, welches statt (65) den komplizierteren allgemeinen Ansatz (62) verlangt. Es läßt sich nun zeigen, daß wir auch beim gedämpften Kanal als gute Annäherung eine FOURIERreihe erhalten, aber mit

anderer Periodizität. Auch dies läßt sich aus unserer Hauptgleichung (20) herleiten.

Während wir im letzten Kapitel vorausgesetzt hatten, daß die rechte Seite dieser Gleichung klein ist, können wir dies bei ständig wachsender Frequenz sicher nicht mehr aufrechterhalten. Wir können im Gegenteil hier voraussetzen, daß schließlich

$$\bar{L}\,Z\left(\frac{\omega}{c}l_2\right) \geqslant 1 \tag{67}$$

ist, wobei wir die Möglichkeit ausschließen, daß der Wandleitwert umgekehrt proportional der Frequenz oder noch stärker abfällt. Da der Wandleitwert im allgemeinen eher mit der Frequenz wächst als abfällt, bei hohen Frequenzen vielfach einem konstanten Wert zustrebt, enthält diese Annahme sicher die meisten interessierenden Fälle.

Die Ungleichung (67) ist umso besser erfüllt je kleiner die Wellenlänge gegenüber der Kanalbreite ist

$$\lambda \ll l_2\,, \tag{67a}$$

und der durch sie gekennzeichnete Bereich setzt um so früher im Frequenzgang ein, je größer der Wandleitwert gegenüber dem Wellenleitwert der Luft ist:

$$\bar{L} \gg \frac{1}{Z}\,. \tag{67b}$$

Dieses reziproke Verhalten der Einschränkungen (36) und (67) besagt, daß die in diesem und die im letzten Kapitel diskutierten Bereiche sich grundsätzlich nicht überschneiden können, sondern daß immer mehrere Oktaven dazwischen liegen, die durch keine der hier gegebenen Darstellungen erfaßt werden. Selbst wenn man annimmt, daß der Wandleitwert sich mit wachsender Frequenz auf das Zehnfache vergrößert, bleiben doch noch 2—3 Oktaven unüberbrückt*).

Mit der Forderung (67) muß auch die linke Seite in unserer Hauptgleichung groß werden. Da nun die einzelnen k_2-Werte beschränkt sind, indem der an der Wandfläche entstehende Phasensprung nie mehr als $\frac{\pi}{2}$ betragen kann:

$$k_2 l_2 < n\pi + \frac{\pi}{2} \tag{68}$$

*) Vgl. hierzu den Nachtrag am Ende der Arbeit.

und da physikalisch ebenso die Vermutung naheliegt, daß auch g_2 nicht beliebig wachsen wird, so gelangt man zu der Annahme, daß die linke Seite in Gleichung (20) dadurch groß wird, daß der Tangens an seine Polstellen rückt. Diese liegen aber bei:

$$k_{2n} l_2 = n\pi + \frac{\pi}{2}\,. \tag{69}$$

Wir machen daher den Ansatz:

$$\bar{k}_{2n} l_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \Delta k_{2n} l_2 + i\, g_{2n} l_2\,, \tag{70}$$

wobei wir voraussetzen, daß

$$\Delta k_{2n} l_2 \ll \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{71a}$$

und ebenso

$$g_{2n} l_2 \ll \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{71b}$$

ist, was wir beides durch die Rechnung bestätigt finden werden. Hiermit läßt sich die linke Seite der Hauptgleichung umformen zu:

$$\begin{aligned} & k_{2n} l_2\, \mathfrak{Tg}\,(-i\,\bar{k}_{2n} l_2) \\ &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \Delta k_{2n} l_2 + i\, g_{2n} l_2}{\mathfrak{Tg}\,(i\,\Delta k_{2n} l_2 + g_{2n} l_2)} \\ &\approx \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{i\,\Delta k_{2n} l_2 + g_{2n} l_2}\,. \end{aligned} \tag{72}$$

Diese Form legt es nahe, Zähler und Nenner zu vertauschen und dabei auf der rechten Seite der Hauptgleichung statt des Wandleitwertes den Wandwiderstand einzuführen, den wir dabei ebenfalls in Wirk- und Blindanteil zerlegen:

$$W = w + i\,q\,. \tag{73}$$

Dann erhalten wir:

$$i\,\Delta k_{2n} l_2 + g_{2n} l_2 = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\left(\frac{\omega}{c} l_2\right)} \cdot \frac{w + i\,q}{Z}\,, \tag{74}$$

was sich aufspalten läßt in:

$$\Delta k_{2n} l_2 = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{\omega}{c} l_2} \cdot \frac{q}{Z}\,, \tag{74a}$$

$$g_{2n} l_2 = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{\omega}{c} l_2} \cdot \frac{w}{Z}\,. \tag{74b}$$

Man überzeugt sich, daß bei genügend hoher Frequenz die gemachten Vernachlässigungen (71a) und (71b) immer erfüllt sind.

Wir können daher für die Querfunktion angenähert eine reine Kosinusverteilung annehmen, deren Periodizität entsprechend dem Phasensprung um $\frac{\pi}{2}$ an der schluckenden Wand doppelt so groß ist wie oben. Wir erhalten somit die allgemeine Ansatzform:

$$\bar{\psi}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_n\cos\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l_2}y\right)\cdot e^{(-ik_{1n}-g_{1n})x}. \tag{75}$$

Wir haben nun noch die Gültigkeit des Grenzüberganges (63) zu beweisen. Da bei hohen Frequenzen und streifendem Einfall immer $k_1 \approx \omega : c$ ist, ergibt sich aus (32) und den Beziehungen (70), (71) und (74b):

$$g_{1n}=\frac{k_{2n}g_{2n}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)}=\frac{1}{l_2}\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{\omega}{c}l_2}\right]^2\frac{w}{Z}. \tag{76}$$

Das Dämpfungsmaß längs des Kanals verschwindet bei konstantem Wirkwiderstand mit wachsender Frequenz umgekehrt proportional dem Quadrat derselben.

Schließlich erhalten wir für das Ausbreitungsmaß k_{1n} aus (31), worin neben $\frac{\omega}{c}$ als einzige nennenswerte Größe nur k_{2n} auftritt, dessen Einfluß ebenfalls immer kleiner wird:

$$k_{1n}=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{\omega}{c}l_2}\right)^2}. \tag{77}$$

Hiermit ist prinzipiell der asymptotische Übergang zur geometrischen Strahlendarstellung bewiesen. Im Falle des gedämpften Kanals dürfte dieser aber erst bei so hohen Frequenzen eintreten, daß er praktisch nicht mehr interessiert. Wesentlich ist nun, daß unsere Formeln auch aussagen, mit welchen Eigenschaften wir uns diesem Bereiche nähern. Einmal zeigt Formel (76), daß nicht alle Lösungsanteile gleich gedämpft werden. Wir haben daher im allgemeinen gar keinen exponentiellen Abfall zu erwarten, so lange noch mehrere Lösungsanteile zusammenwirken. Erst bei größeren Entfernungen im Kanal bleibt nur die „wandparallele Ausbreitung" ($n=0$) übrig, erst in diesem Bereich ist ein konstanter Abfall in $\frac{d\,b}{m}$ zu erwarten. Bei der Beobachtung mit reinen Tönen muß ferner das Bild auch durch Interferenzerscheinungen zerrissen werden; denn nach Gleichung (77) ergibt sich an der Stelle x eine relative Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Lösungsanteilen von der Größe:

$$(k_{1(n+1)}-k_{1n})\,x=\frac{\pi}{2}\frac{\lambda\,x}{l_2^2}(n+1). \tag{78}$$

Hierdurch wird ferner bewirkt, daß das Feldbild über einem Querschnitt im allgemeinen gar nicht als quasi-stationär aufgefaßt werden kann, sondern daß erhebliche Phasenverschiebungen auftreten, die weit über das Maß hinausgehen, das durch die Energieabgabe an die schluckende Wand bedingt ist.

Abb. 5 zeigt ein Beispiel für die Veränderung des Feldbildes bei der Ausbreitung längs eines Kanals. Hierin ist $w=Z$ gewählt, was erfüllt ist, wenn die Seiten des Kanals mit einem porösen Schallschlucker von hoher Porösität (z. B. Schlackenwolle) und genügender Schichtdicke ausgekleidet sind und wenn dabei außerdem zur Verhinderung der seitlichen Kopplung kleine Trennwände quer zur Oberfläche eingebaut sind, wie dies unten in Abb. 7d skizziert ist. Zur Erfüllung der Ungleichung (67) ist $\lambda : l_2 = 4 : 25$ angenommen, das bedeutet bei einer halben Kanalbreite von 20 cm etwa eine Frequenz von 10000 Hz. An der Eingangsfläche $x=0$ ist eine gleichmäßige Druck- oder Schnellenverteilung vorausgesetzt, was diesmal zu dem Ansatz führt:

$$\bar{\psi}(x,y)=\frac{4\,\psi_0}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2\,l_2}y\right)\cdot e^{-i\bar{k}_{11}x}\right. \tag{79}$$
$$\left.-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2\,l_2}y\right)e^{-i\bar{k}_{13}x}+\frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi}{2\,l_2}y\right)e^{-i\bar{k}_{15}x}\ldots\right].$$

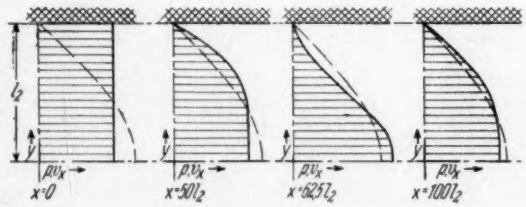

Abb. 5. Änderung der Querverteilung beim Fortschreiten einer am Eingang ebenen Schallwelle im gedämpften Kanal. (Es ist $\bar{w}=Z$ und $\lambda : l_2 = 4 : 25$ angenommen)

Es sind nun die Querschnitte bei $x = 50\,l_2$, $x = 62{,}5\,l_2$ und $x = 100\,l_2$ herausgegriffen, welche ausnahmsweise zu quasi-stationären Feldbildern führen, dabei ist die relative Phasenlage bei $x = 50\,l_2$ und $x = 100\,l_2$ die gleiche wie im Eingangsquerschnitt. Dagegen sind bei $x = 62{,}5\,l_2$ die Lösungsanteile $n = 1$ und $n = 2$ gegenphasig zur Grundverteilung $n = 0$. Der Vergleich mit $x = 50\,l_2$ zeigt die Interferenzschwankungen, die bei unserem Beispiel selbst in 10 m Entfernung vom Eingang noch deutlich sind. Bei $x = 100\,l_2$ ist das Feldbild weitgehend nur noch durch die Grundverteilung beherrscht, die überall gestrichelt eingetragen ist. Man erkennt deutlich, daß das Feld in der Mitte bei den gewählten Entfernungen in voller Stärke erhalten bleibt, dagegen sehr bald am Rande verschwindet. In dieser Hinsicht erweisen sich die Kurven als sehr ähnlich den experimentellen Schallverteilungskurven, welche v. BÉKÉSY[14]) bei der Ausbreitung von Schallwellen im Freien entlang schluckender Oberflächen gefunden hat.

Wir sind auch in diesem Kapitel in der Lage, die gefundenen Ergebnisse auf eine andere, physikalisch allgemeinere Darstellung zu stützen. Da nämlich im ganzen vorliegenden Bereich nicht nur

(80a) $$g_1 \ll k_1\,,$$

sondern auch

(80b) $$g_2 \ll k_2$$

ist, können wir die in den Lösungen (4) bzw. (29) auftretenden Wellenzüge nahezu als gewöhnliche ungedämpfte Wellenzüge ansehen. Das Gebiet der Strahlbildung fällt daher auch in den Bereich der früher angegebenen Darstellung, obschon es sich dabei um streifende, Einfallswinkel handelt. Jeder Lösungsanteil setzt sich hiernach aus zwei zur Kanalmitte symmetrisch sich gabelnden Wellenzügen zusammen, die gegen die Mittellinie bzw. die schluckende Wand den Glanzwinkel:

(81) $$\varepsilon = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{\omega}{c}\,l_2} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2\,l_2}$$

bilden. Aus der verschiedenen Neigung dieser Wellen leuchtet sofort ein, daß sie interferieren müssen.

Auf Seite 64 in Formel (45) ist nun gezeigt, welchen Amplitudensprung R und welchen Phasensprung γ eine ebene Welle an einer schluckenden Wand erfährt. Sie enthält das allgemeine Gesetz, daß es bei schrägem Einfall nicht auf die Anpassung des Wandwiderstandes an den Wellenwiderstand der Luft, sondern auf diejenige an den Wellenwiderstand dividiert durch den Einfallskosinus ankommt. Nicht der Quotient aus Druck und resultierender Schnelle, sondern der viel größere aus Druck und wandnormaler Schnelle ist maßgebend. Dieser Quotient ist aber bei streifendem Einfall meist größer als der Wandwiderstand; diese Annahme entspricht außerdem der zu Eingang dieses Kapitels vorausgesetzten Ungleichung:

(82) $$\overline{W} \ll \frac{Z}{\cos\vartheta} = \frac{Z}{\varepsilon}\,.$$

Wir erhalten daher bei streifendem Einfall für den Schalldruck die gleichen Verhältnisse, wie beim senkrechten Übertritt von Schall aus einem schallhärteren in ein schallweicheres

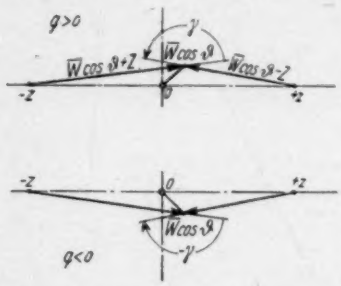

Abb. 6. Vektordiagramm zur Phasenumkehr bei streifendem Einfall

Medium. Der dabei auftretende Phasensprung unterscheidet sich, gleichgültig ob es sich um eine Vor- oder eine Nacheilung handelt, stets nur wenig von $\frac{\pi}{2}$. Abb. 6 zeigt dies durch geometrische Darstellung der Gleichung (45) in der komplexen Ebene. Der Punkt $\overline{W}\cos\vartheta$ liegt immer in der Nähe des Ursprungs. Die zu ihm von $+Z$ und $-Z$ gezogenen Fahrstrahlen stellen Zähler und Nenner der Gleichung (45) dar. Wie man sieht, zeigen sie einander fast entgegen. Diese Phasenumkehr erklärt die bei streifendem Einfall und höheren Frequenzen

[14]) G. v. BÉKÉSY, Z. techn. Phys. 14 (1933), S. 6.

in der unmittelbaren Nähe poröser Schallschlucker stets auftretende Feldauslöschung[15]). Dabei wird nicht nur der Druck durch Interferenz zum Verschwinden gebracht, sondern auch die mit diesem gleichphasige wandparallele Komponente der Schallschnelle, während nur die viel kleinere wandnormale Schallschnelle übrig bleibt. Es handelt sich also bei dieser Interferenz um ein Verschwinden der fortschreitenden Schallenergie in der unmittelbaren Nähe der Wand.

Schließlich erhalten wir auch die Formel (76) mit Hilfe dieser Betrachtung. Zunächst folgt für den Schluckgrad bei streifendem Einfall aus (45) und (46) bei Benutzung des Wandwiderstandes:

$$s = \frac{4\,w\cos\vartheta}{Z} = \frac{4\,w}{Z}\,\varepsilon\,, \tag{83}$$

dadurch liefert (44):

$$g_1 = \frac{\delta}{c} = \frac{1}{l_2}\cdot\frac{w}{Z}\cdot\varepsilon^2\,, \tag{84}$$

was im Hinblick auf (81) mit (76) identisch ist.

5. Der Einfluß der seitlichen Kopplung in der Wand

Die im letzten Kapitel besprochene „Strahlbildung" ist nicht der einzige Grund, warum das Dämpfungsmaß bei hohen Frequenzen in einem mit porösem Schallschluckstoff ausgekleideten Kanal abfällt. Wie die Ungleichung (67) zeigt, ist eine „Strahlbildung" immer erst dann zu erwarten, wenn die Wellenlänge, gemessen an der Kanalbreite, nicht mehr groß ist. Nehmen wir nun, wie in dem in Abb. 5 dargestellten Beispiel, bereits den äußerst günstigen Fall an, daß $L = \frac{1}{Z}$ ist, so folgt, daß der im letzten Kapitel behandelte Abfall erst einsetzt, wenn die Wellenlänge unter die halbe Kanalbreite gesunken ist. Dies deckt sich auch mit der Beobachtung von SIVIAN[11]), welcher feststellte, daß in diesem Bereich die Druckverteilung von der Kanalmitte nach den Wänden hin erheblich abzufallen beginnt. Durch Verwendung von Kanalbreiten von nur 10 cm wäre man also in der Lage das Gebiet der „Strahlbildung" in den Frequenzbereich über 7000 Hz zu legen.

Nun zeigt eine einfache Betrachtung, daß auch dann, wenn durch genügend schmale Kanalbreite die „Strahlbildung" verhindert ist, bei einer homogenen Auskleidung des Kanals mit einem porösen Schallschlucker ein Abfall bei hohen Frequenzen zu erwarten ist. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die verwendete Schichtdicke als beliebig dick angesehen werden kann, d. h. daß die einmal eingedrungenen Wellen nicht mehr zur Oberfläche gelangen. Ebenso wollen wir zur Vereinfachung die Porosität des Materials als groß annehmen, d. h. wir wollen das Volumen der schwingungsfähigen Luft im porösen Medium groß gegenüber dem Volumen annehmen, das von den Fasern des porösen Schluckers eingenommen wird. In diesem Falle nähert sich das poröse Material bei hohen Frequenzen in seinen Eigenschaften weitgehend der freien Luft, so daß seine Anwesenheit für die Schallausbreitung überhaupt kein Hindernis mehr darstellt. Die am Eingang des Kanals erzeugten Schallwellen müssen daher schließlich ebenso divergieren, als ob eine Ausbreitung in den freien Raum vorliegt. Mit wachsender Entfernung bleibt aber die Schwächung, die durch Divergenz verursacht ist, hinter einer exponentiellen Dämpfung beliebig zurück. Im Rahmen der gegebenen Darstellung müßte daher auch in einem Bereich, in welchem die zu Eingang des 3. Kapitels erwähnte Ungleichung (36) gilt, das Dämpfungsmaß für einen mit porösen Schallschluckern ausgekleideten Kanal bei hohen Frequenzen verschwinden. Dies Ergebnis erhält man in der Tat auch, wenn man auf die seitliche Kopplung im Innern der Wand Rücksicht nimmt.

Aus dem gleichen Grunde kann auch beim Nachhallproblem im Gültigkeitsbereich der Ungleichung (36) der Nachhall bei wandparalleler Ausbreitung viel länger sein als nur doppelt so groß wie bei senkrechtem Auftreffen.

[15]) Siehe auch v. VERMEULEN, Philips techn. Rdsch. **3** (1938), S. 368.

Übrigens tritt diese Erscheinung auch bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über halbleitendem Boden auf und ist dort seit langem bekannt. Von dieser Analogie hat inzwischen auch K. SCHUSTER, Akust Z. **4** (1939), S. 325, zur Lösung des vorliegenden Problems Gebrauch gemacht.

Um nun die Bedeutung der seitlichen Kopplung darzulegen, müssen wir auf spezielle Beispiele Bezug nehmen. Sie zeigen aber, daß der Einfluß der seitlichen Kopplung sich in einer Verschlechterung des Wandleitwertes äußert, wenn im Innern der schluckenden Wand die Federung von Luftschichten von Bedeutung ist.

Wir wollen nun, bevor wir auf das eingangs angeschnittene Problem einer homogenen porösen Wand von beliebiger Schichtdicke eingehen, einen Fall behandeln, in dem diese Wirkung bereits bei tiefen Frequenzen deutlich wird; dies ist die von WINTERGERST[16]) zuerst unter Beschränkung auf senkrechten Einfall untersuchte Stoffbespannung in kleinem Abstand d vor starrer Wand. Das Schema ist in Abb. 7a skizziert. Wir nehmen an, daß die Stoffbespannung genügend schwer und von nicht zu hohem Strömungswiderstand ist, so daß das an ihr auftretende Druckgefälle nur einen Strömungswiderstand $\boldsymbol{R}$ zu überwinden hat, um die zur Wand normale Schnelle v_n zu erzeugen:

$$\bar{p}_I - \bar{p}_{II} = \boldsymbol{R} \cdot \bar{v}_n . \tag{85}$$

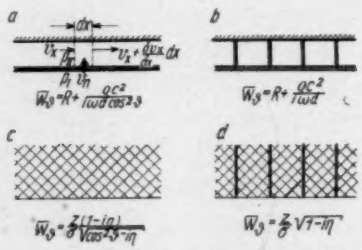

Abb. 7. Wandwiderstände mit und ohne seitliche Kopplung. Oben: Stoffbespannung in kleinem Abstand vor starrer Wand. Unten: Homogene, poröse Packung von großer Schichtstärke

Der Druck auf der Rückseite der Bespannung wird bei tieferen Frequenzen ($\lambda > 10\,d$) durch die Verdichtung δ des dahinter liegenden Luftpolsters bestimmt:

$$\bar{p}_{II} = \varrho\, c^2 \cdot \bar{\delta} . \tag{86}$$

Bei senkrechtem Schalleinfall entstehen infolge der Gleichphasigkeit aller Drücke nur Bewegungen senkrecht zur Wand, so daß für die Verdichtung δ angesetzt werden kann.

$$\bar{\delta} = \frac{\bar{v}_n}{i\,\omega\,d} . \tag{87}$$

Hieraus ergibt sich für den Wandwiderstand die Reihenschaltung des Strömungswiderstandes der Stoffbespannung und des Federungswiderstandes der Luftschicht:

$$\overline{W}_0 = \frac{\bar{p}_I}{\bar{v}_n} = \boldsymbol{R} + \frac{\varrho\, c^2}{i\,\omega\,d} . \tag{88}$$

Bei schrägem Einfall ist nun zu beachten, daß auch hinter der Stoffbespannung seitliche Bewegungen auftreten, so daß für die Verdichtung anzusetzen ist:

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_y + \bar{\delta}_x = \frac{1}{i\,\omega}\left(\frac{\bar{v}_n}{d} - \frac{\partial\,\bar{v}_x}{\partial\,x}\right) . \tag{89}$$

Man wäre geneigt anzunehmen, daß hierbei eine Möglichkeit zu seitlichem Ausweichen eine Verringerung des Federungswiderstandes und somit eine Verbesserung des Wandleitwertes zur Folge hat. Die folgende Rechnung zeigt aber, daß gerade das Gegenteil der Fall ist. Eine unter dem Einfallswinkel ϑ schräg einfallende Welle wird dargestellt durch:

$$\bar{\psi}_E = \bar{C}\, e^{-i\frac{\omega}{c}\sin\vartheta\, x - i\frac{\omega}{c}\cos\vartheta\, y} . \tag{90}$$

Die in ihr enthaltene x-Abhängigkeit muß stets auch hinter der reflektierenden Trennfläche dieselbe sein. Dies ändert nichts an der Beziehung (85). Die darin auftretenden Größen haben nicht nur die gleiche Zeitabhängigkeit, sondern auch die gleiche Phasenverschiebung in y-Richtung. Die seitliche Strömung im Innern des Gewebes können wir dabei entsprechend seiner Struktur gegenüber der normalen vernachlässigen. Setzen wir nun für das Potential der Schnelle hinter der Bespannung an:

$$\bar{\psi}_{II} = \bar{\psi}_2(y) \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}\sin\vartheta\, x} , \tag{91}$$

so ergibt sich einerseits:

$$\bar{p}_{II} = -i\,\omega\,\varrho \cdot \bar{\psi}_2 \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}\sin\vartheta\, x} \tag{92}$$

und andererseits:

$$\frac{\partial\,\bar{v}_x}{\partial\,x} = -\left(\frac{\omega}{c}\sin\vartheta\right)^2 \cdot \bar{\psi}_2 \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}\sin\vartheta\, x} . \tag{93}$$

Durch Quotientenbildung folgt hieraus, daß das seitliche Druckgefälle hinter der Bespannung

[16]) E. WINTERGERST, Schalltechn. 6 (1933), S. 5.

eine Verdichtung δ_x bewirkt, die mit dem Druck in Phase ist:

$$\delta_x = \frac{i}{\omega}\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} = \frac{\sin^2\vartheta}{c^2\varrho}\bar{p}_{\mathrm{II}}\,; \tag{94}$$

das bedeutet aber, daß durch den schrägen Schalleinfall kein seitliches Ausweichen, sondern vielmehr eine zusätzliche Kompression bewirkt wird. Durch Zusammenfassung von (86), (89) und (94) folgt hieraus:

$$\bar{p}_{\mathrm{II}} = \varrho c^2\delta = \frac{\varrho c^2}{i\omega d}\bar{v}_n + \sin^2\vartheta\,\bar{p}_{\mathrm{II}}$$

oder

$$\bar{p}_{\mathrm{II}} = \frac{\varrho c^2}{i\omega d\cos^2\vartheta}\bar{v}_n\,. \tag{95}$$

Der Federungswiderstand wird somit beim Übergang zum schrägen Einfall umgekehrt proportional dem Quadrat des Einfallskosinus erhöht. Der Gesamtwiderstand lautet:

$$\overline{W}_\vartheta = \boldsymbol{R} + \frac{\varrho c^2}{i\omega d\cos^2\vartheta}\,. \tag{96}$$

Da ferner zwischen Leitwert und Wandwiderstand die allgemeine Beziehung besteht:

$$L = A + iB = \frac{1}{W} = \frac{w - iq}{w^2 + q^2}\,, \tag{97}$$

so heißt dies im vorliegenden Falle, daß der Wandleitwert bei streifendem Einfall nach 0 geht. Besteht daher im Raum der Abb. 1 die schluckende Fläche nur aus einer solchen Bespannung, so ist bei wandparalleler Ausbreitung überhaupt keine merkliche Nachhallverkürzung gegenüber dem leeren Raum zu erwarten. Verhindert man nun die seitliche Kompression durch eingeschaltete starre Querwände, wie dies Abb. 7b zeigt, so treten die Überlegungen des 3. Kapitels in Kraft und wir haben nur den doppelten Nachhall wie bei senkrechtem Einfall zu erwarten. Über Versuche, die diese theoretischen Überlegungen gut bestätigt haben, wird H. Neubert berichten.

Auch für mitschwingende Schallschlucker ist diese Erhöhung des Federungswiderstandes bei schrägem Einfall von Bedeutung. Nach den Untersuchungen von E. Meyer[17]) machten sich hierbei die seitlichen Schwingungen im Luftpolster vor allem durch Resonanzwirkungen sehr störend bemerkbar. Um diese zu verhindern, wurden zwei Mittel angewandt, die seitliche Auskleidung der Luftkammern mit Dämpfungsstoff, wodurch gleichzeitig eine erhöhte Energievernichtung bewirkt wurde, oder auch nur die Unterteilung der Luftkammern durch Querwände nach Art von Abb. 7b. Dabei zeigte sich, daß jede Verhinderung oder Schwächung der seitlichen Bewegungsanteile die Resonanzfrequenz der Anordnung erniedrigte, was nach der hier gegebenen Ableitung auf die dabei gleichzeitig bei schrägem Einfall bewirkte Verringerung des Federungswiderstandes zurückgeführt werden kann.

Wir wenden uns nun dem porösen Schallschlucker von beliebiger Schichtdicke zu. Wie in einer früheren Arbeit[18]) abgeleitet wurde, ergibt sich hierbei für den Wandleitwert

$$L = \frac{1}{W} = \frac{\sigma}{Z}\frac{\sqrt{\cos^2\vartheta - i\eta}}{(1 - i\eta)}\,, \tag{98}$$

worin zur Abkürzung

$$\eta = \frac{r}{\omega\varrho} \tag{99}$$

gesetzt ist. Hierbei bedeutet r den spezifischen Strömungswiderstand und σ die bereits erwähnte Porosität des Materials, welche erfahrungsgemäß nur wenig von 1 abweicht. Bei tiefen Frequenzen ist

$$i\eta \gg 1 \text{ und erst recht } i\eta \gg \cos^2\vartheta\,; \tag{100}$$

dadurch wird der Wandleitwert unabhängig vom Einfallswinkel

$$L = (1+i)\frac{\sigma}{Z}\sqrt{\frac{2\omega\varrho}{r}} \tag{101}$$

und wir erhalten für das Dämpfungsmaß nach Gleichung (50)

$$g_1 = \frac{1}{2l_2}\sigma\sqrt{\frac{2\omega\varrho}{r}}\,. \tag{102}$$

Hiernach wäre ein Anstieg mit der Wurzel aus der Frequenz zu erwarten. Im allgemeinen dürfte der Anstieg stärker sein, da gerade bei tiefen Frequenzen die Endlichkeit der Schichtdicke eine Rolle spielt und dabei die Interferenzwirkung im Innern des Materials die Dämpfungsverhältnisse gegen tiefe Frequenzen weiterhin verschlechtert[19]).

[17]) E. Meyer, Elektr. Nachr.-Techn. **12** (1935), S. 393; **13** (1936), S. 95.

[18]) Elektr. Nachr.-Techn. **10** (1933), S. 242.

[19]) Elektr. Nachr.-Techn. **12** (1935), S. 333.

Bei hohen Frequenzen wird

(103a) $$i\eta \ll 1 .$$

Es ist hieraus bereits abzuschätzen, daß der Wandleitwert bei schrägem Einfall wesentlich kleiner als für senkrechten Einfall ist. Bei nicht zu hohen Frequenzen, die wegen der Strahlbildung ohnehin aus dem Anwendungsbereich der Formel (50) fallen würden, können wir trotzdem annehmen [20])

(103b) $$i\eta \gg \cos^2\vartheta .$$

Dadurch ergibt sich für den Wandleitwert der einfache Ausdruck

(104) $$\bar{L} = (1-i)\frac{\sigma}{Z}\sqrt{\frac{r}{2\omega\varrho}}$$

und wir erhalten wieder unter Anwendung der Gleichung (50) für das Dämpfungsmaß

(105) $$g_1 = \frac{1}{2 l_2}\sigma\sqrt{\frac{r}{2\omega\varrho}} .$$

Die Tendenz ist hiernach die umgekehrte wie in Gleichung (102). Das Dämpfungsmaß nimmt mit der Wurzel aus der Frequenz ab.

Verhindern wir aber durch eingeschaltete Querwände (siehe Abb. 7b und 7d) die seitliche Kopplung, so wird dieser Abfall vermieden, wobei nunmehr der Wandleitwert asymptotisch einem Maximum zustrebt

(106) $$\bar{L}_{max} = \frac{\sigma}{Z}$$

und somit auch das Dämpfungsmaß den Höchstwert

(107) $$g_{1\,max} = \frac{\sigma}{2 l_2}$$

annimmt, bis die Strahlbildung einsetzt.

Die bei ähnlichen Untersuchungen meist gemachte Annahme eines konstanten Wandleitwertes, welche die Rechnung sehr vereinfacht, liefert, wie unsere Beispiele zeigen, zu günstige Werte. Es ist also von Vorteil, diese Verhältnisse künstlich durch den Einbau von Querwänden nach Abb. 7b und 7d herbeizuführen, jedenfalls solange wir im Gültigkeitsbereich der Formel (50) bleiben. Da umgekehrt im Bereich der Strahlbildung jede Erhöhung des Wandleitwertes ungünstig, jede Erniedrigung günstig ist, so kann die durch starre Querwände bewirkte Verbesserung des Dämpfungsmaßes nur vorteilhaft in Erscheinung treten, wenn gleichzeitig kleine Kanalbreiten benutzt werden.

[20]) Auch für die Anwendung der bei hohen Frequenzen gültigen Formel (76) würde die Ungleichung (103b) gelten, denn im Gebiet der Strahlbildung nimmt nach (81) $\cos^2\vartheta$ umgekehrt proportional dem Quadrat der Frequenz, dagegen η nur umgekehrt proportional der Frequenz ab.

Zusammenfassung

1. Zur Untersuchung des Nachhalls bei streifendem Einfall werden die Eigenschwingungen eines zweidimensionalen Raumes untersucht, in welchem drei Wände starr und eine schallschluckend angenommen wird. Es wird gezeigt, daß auch bei denjenigen Eigenschwingungen, die im ungedämpften Raum eine zur Schluckwand parallele Wellenausbreitung annehmen würden, eine Neigung der Wellenfronten gegen die Schluckwand hin auftritt.

Die an der Schluckwand auftretende Randbedingung wird durch ihren Wandleitwert $\bar{L} = A + iB$ gekennzeichnet, welcher angenähert aus stationären Untersuchungen entnommen wird. Dabei wird die Möglichkeit des Einflusses seitlicher Kopplungen in der Wand offen gehalten.

2. Als analoges Problem werden die allgemeinen Gleichungen für die stationäre Ausbreitung des Schalles durch einen langen zweidimensionalen Kanal untersucht, dessen schallschluckende Seitenflächen ebenfalls durch ihren Wandleitwert gekennzeichnet werden. Es wird gezeigt, daß bei nicht zu tiefen Frequenzen und bei streifendem Einfall beide Probleme formal identisch sind.

3. Zunächst wird der Bereich tiefer Frequenzen untersucht, der hauptsächlich dadurch gekennzeichnet ist, daß die Wellenlänge λ groß gegenüber der Raum- bzw. halben Kanalbreite l_2 ist. Es zeigt sich, daß die Nachhallzeit T_{90} bei „wandparallelen" Eigenschwingungstypen nicht wie sonst durch den Schluckgrad, sondern durch den Realteil A des Wandleitwertes bestimmt wird

$$T_{90} = 0{,}04\,\frac{l_2}{AZ}$$

(Z Wellenwiderstand der Luft).

Kann zudem, wie oft bei tiefen Frequenzen, die seitliche Kopplung vernachlässigt werden, so ist diese Nachhallzeit nur doppelt so groß wie diejenige bei senkrechtem Einfall auf die Schluckwand

$$T_{90} = 2\,T_0 .$$

Die Übertragung auf das Kanalproblem liefert die aus den Arbeiten von Bosquet und von Sivian bereits bekannten analogen Beziehungen für das Dämpfungsmaß D in db/m

$$D = 4{,}4\,\frac{AZ}{l_2} .$$

Auch hier läßt sich unter Ausschaltung seitlicher Kopplungen der Schluckgrad s_0 bei senkrechtem Einfall einführen und man erhält

$$D = 1{,}1\,\frac{s_0}{l_2} .$$

Dies deckt sich, abgesehen von einer Abweichung im Zahlenfaktor, mit einer von Piening angegebenen empirischen Formel. (Bei anderen Querschnittsformen ist hier überall statt l_2 das Verhältnis der Querschnittsfläche zum schlukkenden Umfang einzusetzen.)

4. Im Bereich hoher Frequenzen, der dadurch gekennzeichnet ist, daß die Wellenlänge λ kleiner als die Raumbreite bzw. die halbe Kanalbreite l_2 ist, setzt „Strahlbildung" ein, das bedeutet, daß der Schalldruck an den Rändern verschwindet, dagegen in der Mitte nur eine geringe Schwächung erfährt. Das Feldbild kann in diesem Bereich angenähert aus ungedämpften ebenen Wellenzügen zusammengesetzt werden, die mit einem kleinen Glanzwinkel auf die Wandoberfläche auftreffen und von diesem nach den normalen für ebene Wellen geltenden Gesetzen reflektiert werden. Die von v. Békésy u. a. beobachtete Feldauslöschung in der unmittelbaren Nähe der schluckenden Oberfläche kommt durch Interferenz zustande, indem der Phasensprung bei streifendem Einfall $\frac{\pi}{2}$ beträgt.

Zur Befriedigung einer beliebigen Feldverteilung im Eingangsquerschnitt des Kanals ist die Überlagerung derartiger Wellenzüge mit verschiedenen Ausbreitungsrichtungen erforderlich, wodurch die Querverteilung des Feldes ihren quasi-stationären Charakter verliert und der bei reinen Tönen zu erwartende Abfall im Kanal von starken Interferenzschwankungen durchsetzt ist. Schließlich überwiegt nur die Querverteilung der niedrigsten Ordnung (wandparalleler Typ), für deren Dämpfungsmaß gilt

$$D = 0{,}54\,\frac{\lambda^2 w}{l_2^3 Z} ,$$

worin w den Wirkanteil des zum Wandleitwert reziproken Wandwiderstandes bedeutet. Entsprechend gilt für die Nachhallzeit der wandparallelen Eigenschwingungen

$$T_{90} = 0{,}33\,\frac{l_2^3 Z}{\lambda^2 w} .$$

Dieselben werden hiernach bei hohen Frequenzen beliebig groß, d. h. die Abklingzeit eines Flatterechos mit hohen Teiltönen wird praktisch nur durch Divergenz, die kleine Schluckfähigkeit der senkrecht getroffenen Abschlußwände und die Absorption der Luft, aber nicht mehr durch die parallele Schluckwand bestimmt. (Eine einfache Übertragung dieser Formeln auf beliebige Querschnittsformen wie oben ist nicht möglich.) [21])

5. Schließlich wird auf die Bedeutung der seitlichen Kopplung in der Schluckwand eingegangen. Als spezielle Beispiele hierfür werden untersucht eine Stoffbespannung in kleinem Abstand vor starrer Wand und eine homogene poröse Schicht von großer Dicke. In beiden Fällen zeigt sich, daß der Wandleitwert durch die seitliche Kopplung verringert wird, daß es daher günstig ist, diese durch Querwände zu verhindern.

Am ersten Beispiel wird insbesondere gezeigt, daß die Steifigkeit der Luftschicht hinter der Stoffbespannung durch die stets gleichphasig auftretende seitliche Kompression erhöht wird. Damit läßt sich auch die von E. Meyer bei mitschwingenden Schallschluckern gemachte Beobachtung erklären, daß eine Verhinderung oder Schwächung der seitlichen Kopplung zu einer Erniedrigung der wirksamen Resonanzfrequenz der Anordnung führt.

(Eingegangen am 12. August 1939.)

[21]) Anm. bei der Korrektur: Auf einen rechteckigen Kanalquerschnitt mit den Abmessungen $2a \times 2b$ und den zugehörigen Wandwirkwiderständen w_a und w_b läßt sich die obige Formel leicht erweitern. Man erhält hierfür:

$$D = \frac{0{,}54\,\lambda^2}{Z}\left(\frac{w_a}{a^3} + \frac{w_b}{b^3}\right).$$

Nachtrag

Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit erhielt ich das am 10. August 1939 veröffentlichte Juliheft des „Journal of the Acoustical Society of America". Dasselbe enthält eine Arbeit von P. M. MORSE: „Some aspects of the theory of room acoustics" und eine Arbeit von F. V. HUNT, L. L. BERANEK und D. Y. MAA: „Analysis of Sound Decay in Rectangular Rooms", die beide die wellentheoretische Ableitung der Nachhallgesetze im rechteckigen Raum behandeln und dabei auch den streifenden Einfall umfassen. Sie bringen einen großen Teil der bereits aus der früheren Arbeit[1]) bekannten und der erst in dieser Arbeit behandelten Ergebnisse. Sie beschränken sich dabei auf die Annahme eines vom Einfallswinkel unabhängigen Wandwiderstandes. Auf die Verwandtschaft mit dem Kanalproblem wird nicht hingewiesen[22]). Dafür umfassen die Arbeiten auch die Gebiete, in welchen mit unserer Bezeichnung $\left(\bar{L}Z\frac{\omega}{c}l_2\right)$ vergleichbar mit 1 ist. Insbesondere bringen HUNT und seine Mitarbeiter ein Diagramm, in welchem $1/\pi \left|\bar{L}Z\right| \frac{\omega}{c} l_2$ als Abszisse und der Phasenwinkel des Wandwiderstandes als Ordinate aufgetragen ist. (Dort ist $\left|\bar{L}Z\right| = 1/\gamma$ und $\frac{\omega l_2}{\pi \cdot c} = \frac{2 l_2}{\lambda} = \eta$ gesetzt). In diese Ebene sind die Punkte eingezeichnet, für welche $\frac{4}{\pi} l_2^2 \frac{\omega}{c} g_1$ (dort $= \eta \cdot \delta_0$), also im wesentlichen das Produkt aus Dämpfungsmaß und Frequenz, konstant ist. An Hand dieses Diagramms ist man in der Lage, auch den Übergangsbereich zwischen der für $\left|\bar{L}Z\frac{\omega}{c}l_2\right| \ll 1$ geltenden Formel

$$D l_2 = 4{,}4\, A Z \qquad \text{(I)}$$

und der für $\left|\bar{L}Z\frac{\omega}{c}l_2\right| \gg 1$ geltenden Formel

$$D l_2 = 2{,}2 \left(\frac{\lambda}{2 l_2}\right)^2 \cdot \frac{w}{Z} \qquad \text{(II)}$$

zu bestimmen.

In Abb. 8 ist das Ergebnis einer solchen Auswertung wiedergegeben. Gewählt ist, wie im Beispiel zu Abb. 5: $\bar{L} = \frac{1}{Z} = A = \frac{1}{w}$. Die horizontale Gerade I gibt das Ergebnis nach der für tiefe Frequenzen geltenden Näherungsformel wieder.

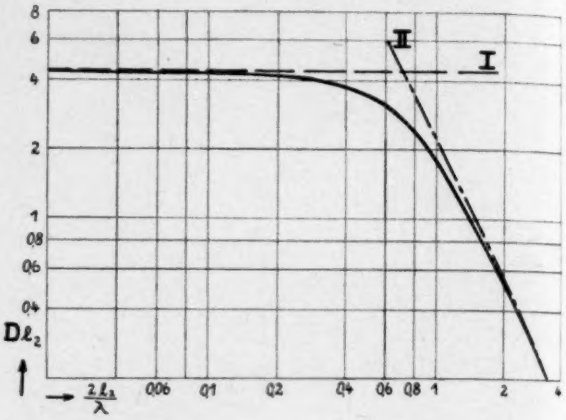

Abb. 8. Frequenzgang eines Dämpfungsmaßes als Beispiel für den Übergang zwischen den Näherungsformeln bei tiefen (I) und bei hohen Frequenzen (II) nach den Diagrammen von HUNT, BERANEK und MAA. (Schluckanordnung nach Abb. 7d mit $w = \frac{1}{A} = Z$)

Die abfallende Gerade II stellt die im Strahlbildungsbereich asymptotisch geltende Abhängigkeit dar. Die ausgezogene Kurve ist nach dem Diagramm von HUNT ermittelt. Die maximale Abweichung tritt unter dem Schnittpunkt der Annäherungsgeraden ein und beträgt 60 %. Außerhalb der zwischen $2l = \lambda$ und $2l = \frac{\lambda}{2}$ gelegenen Oktave ist der Fehler kleiner als 25 %. Es wird daher im allgemeinen genügen, eine Kanalauskleidung unter Benutzung der beiden einfachen Näherungsformeln zu konstruieren und dabei das Übergangsgebiet gefühlsmäßig abzurunden.

(Eingegangen am 8. September 1939.)

[22]) Inzwischen hat P. M. MORSE im Oktoberheft des J. Acous. Soc. Am. eine weitere Arbeit veröffentlicht, die sich mit dem Kanalproblem befaßt, und die ebenso wie die Arbeit von HUNT und Mitarbeiter Diagramme bringt, die die Lösung der Hauptgleichung (20) im ganzen Frequenzbereich enthalten.

Über die Schallschluckung von Resonatoren

Von Vilh. L. Jordan

Mitteilung aus dem Laboratorium für Telegraphie und Telephonie, kgl. Technische Hochschule, Kopenhagen

(Mit 11 Textabbildungen)

Zusammenfassung

Verschiedene Arten von Celotex werden hinsichtlich ihrer Schallschluckung im Rohr untersucht. Auf Grund der sich dabei ergebenden resonanzartigen Frequenzkurven der Schallschluckung wird zu deren Erklärung eine Resonanzwirkung angenommen, und die Resonanzfrequenz wird sowohl berechnet als auch direkt experimentell festgestellt. Es folgt eine nähere Untersuchung über die Schallschluckung resonatorähnlicher Anordnungen, eine einfache Theorie wird erörtert und an einigen Meßbeispielen beleuchtet. Der Einfluß der Dämpfung und die verschiedenen prinzipiellen Möglichkeiten der Anpassung werden besprochen. Zum Schluß werden einige allgemeine Richtlinien für die praktische Ausnutzung von Resonatoranordnungen aufgestellt.

1. Meßapparatur

Es wurden zwei Apparaturen benutzt, die für Schallschluckmessungen bei vertikalem Einfall entwickelt worden sind. App. 1 besteht aus einem Lautsprecherkasten in Verbindung mit einem Rohr von 1,15 m Länge und 9,8 cm lichter Weite. Das Rohrende ist mit einem Messingstopfen abgeschlossen, und vor diesem wird die Probe eingesetzt. Die Bestimmung des Schallschluckgrades erfolgt auf bekannte Weise, indem man das Verhältnis zwischen maximaler und minimaler Schalldruckamplitude feststellt. Konzentrisch im Meßrohr gelagert befindet sich ein dünnes Messingrohr (3 mm lichter Weite), welches zu einem Kondensatormikrophon führt. Das Mikrophon ist durch einen eisernen Kasten akustisch und elektrisch abgeschirmt. Kasten und Rohr sind in der Rohrrichtung verschiebbar angebracht, und die Verschiebung kann auf einem Maßstab abgelesen werden. Über Mikrophon, Verstärker und Meßinstrument (Tonfrequenzspannungsanzeiger) mißt man einen Ausschlag, der proportional der Schalldruckamplitude ist, und somit kann das oben besprochene Verhältnis bestimmt werden.

App. 2 besteht aus einem Rohr von 5,27 m Länge und 28,8 cm lichter Weite. Als Schallquelle ist an dem einen Rohrende ein elektrodynamischer Lautsprecher aufgestellt, gewöhnlich einige cm von der Rohröffnung entfernt. Am anderen Ende befindet sich ein eiserner Deckel (von 30 mm Dicke), auf welchem das Probematerial angebracht wird. Das Mikrophon befindet sich im Rohr und ist auf einem kleinen verschiebbaren Rollwagen angebracht.

Die mit den beiden Meßapparaturen erfaßbaren Meßbereiche sind:

App. 1 $300 < f < 2000$ Hz und

App. 2 $50 < f < 700$ Hz.

Die Lautsprecher werden mit Tonfrequenz von einem Überlagerungssummer gespeist. Für niedrige Frequenzen (App. 2), bei denen man eine größere Frequenzstabilität braucht, benutzt man einen Rückkopplungssummer ohne Selbstinduktivitäten[1]). Die Messung von p_{max}/p_{min} erfolgt gewöhnlich nicht direkt über ein Instrument, sondern über ein geeichtes Potentiometer und einen zweiten Verstärker, an dessen Ausgang das Instrument liegt. Das Potentiometer wird so eingestellt, daß derselbe Ausschlag sowohl im Druckmaximum als im Druckminimum angezeigt wird. Die zwei Einstellungen des Potentiometers geben dann das Verhältnis p_{max}/p_{min} an.

[1]) Lattmann u. Salinger, Elektr. Nachr.-Techn. 13 (1936), S. 133.

2. Untersuchung von „Acousti-Celotex"

Mehrere Proben dieses Fabrikates wurden untersucht. Es ergab sich für Acousti-Celotex C 4 eine Schallschluck-Frequenzkurve, wie sie in Abb. 1 dargestellt ist. Das ausgesprochene Maximum des Schluckgrades bei ungefähr 660 Hz läßt sich durch die Theorie der

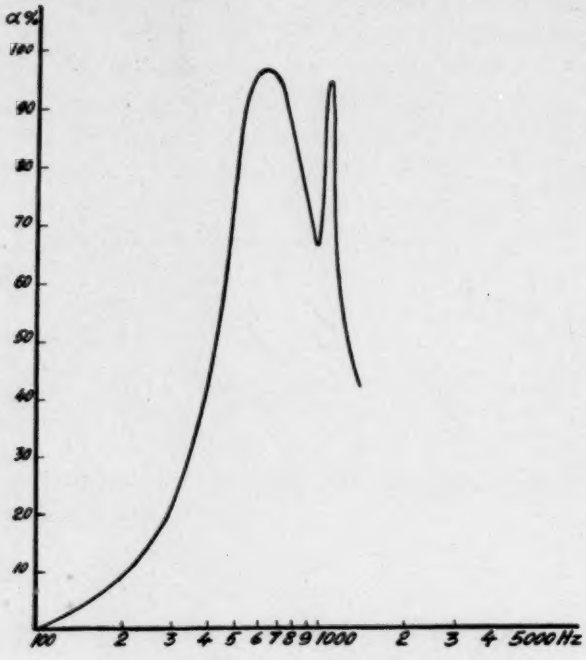

Abb. 1. Schluckgrad-Frequenzkurve für Acousti-Celotex C 4

selektive Schallschluckung durch eine Helmholtzsche Resonanzwirkung zu erklären wäre, bei der die Löcher der Deckplatte die Resonatoröffnungen bildeten und die Hinterschicht den Hohlräumen der Resonatoren entsprach. Um diese Annahme zu bestätigen, wurde eine Deckplatte von C 4 abgenommen und in einem Rohr (vom selben Durchmesser wie das Meßrohr) angebracht (s. Abb. 2). Der Hohlraum hinter der Platte war 22 mm tief (entsprechend der Dicke der Hinterschicht). Als Schallquelle diente ein Überlagerungssummer in Verbindung mit einem kleinen Kegellautsprecher, dicht vor der Deckplatte aufgestellt. Ein dem

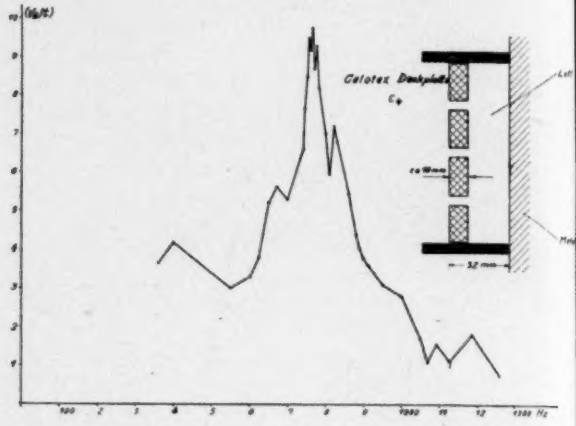

Abb. 2. Hohlraumresonanz der Celotexplatte.

porösen Schallschlucker[2]) nicht erklären; eine nähere Untersuchung des Aufbaues des Stoffes zeigt aber auch, daß dies nicht zu erwarten wäre. Celotex ist kein homogenes poröses Material; die Oberflächenschicht, etwa 10 mm dick, besteht aus ziemlich hart gepreßtem Fibermaterial. Die untere, 22 mm dicke Schicht, die auch aus Fibermaterial besteht, ist poröser und weicher. Die Deckplatte (Oberflächenschicht) ist gelöchert, und die Löcher (4,5 mm Durchmesser) sind in quadratischem Muster angeordnet (Zentrenabstand 13 mm) und dringen teilweise in die hintere Schicht hinein. Dieser Aufbau des Celotex' hat zu der Annahme geführt, daß die Schalldruck im Hohlraum proportionaler Ausschlag wird über Mikrophon, Verstärker und Instrument gemessen. Das Mikrophon befand sich nicht direkt im Hohlraum, war aber durch ein dünnes Rohr damit verbunden. Bei Veränderung der Frequenz ergab sich eine Veränderung der Druckamplitude (des Ausschlags) wie in Abb. 2 dargestellt. Die ausgeprägte Spitze bei 765 Hz bestätigt die Annahme einer Resonanzwirkung, obwohl die beiden Resonanzfrequenzen nicht ganz übereinstimmen.

Die Kurve Abb. 3 zeigt die Schallschluck-Frequenzkurve von Celotex B 3 (Lochdurchmesser 6 mm, Lochabstand 13 mm, Dicke 32 mm). Das Maximum liegt bei etwa 900 Hz; eine weitere Spitze liegt bei 1100 Hz.

Es wurde danach eine ganze Reihe von ver-

[2]) L. Cremer, Elektr. Nachr.-Techn. 12 (1935), S. 333.

schiedenen Anordnungen dieser Art untersucht, z. B. durchlöcherte Platten aus Holz, Pappe und Metall mit einer Hinterschicht aus Filz, Watte oder nur Luft. Es ist bemerkenswert, daß die spitzenartigen Unregelmäßigkeiten, die bei den Kurven von Celotex vorkommen, sich auch bei den Anordnungen mit Holz- oder Pappeplatten zeigen, dagegen nicht bei den Anordnungen mit Metallplatten. Es muß angenommen werden, daß die Unregelmäßigkeiten auf Plattenschwingungen (mit zugehöriger Wiederausstrahlung von Schall) zurückzuführen sind.

Die Tabelle 1 zeigt eine Zusammenstellung von verschiedenen Schallschluckanordnungen und die zugehörigen Werte der Resonanzfrequenzen (sowohl bestimmt durch die Lage der maximalen Schallschluckung als auch berechnet). Die Berechnung setzt eine HELMHOLTZsche Resonanz voraus:

$$(1) \qquad f_{\mathrm{Res}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{V}}\,^{3}),$$

c = Schallgeschwindigkeit in Luft,

K = „Leitfähigkeit" eines Loches, gegeben durch

$$(2) \qquad \frac{1}{K} = \frac{1}{2r_0} + \frac{b}{\pi r_0^2}\,^{4}),$$

$2r_0$ = Lochdurchmesser

b = Plattendicke

V = $\frac{\text{Hohlraumvolumen}}{\text{Zahl der Löcher}}$.

Abgesehen von ein paar Ausnahmen liegen die berechneten Werte der Resonanzfrequenz durchweg höher als die gemessenen. Die Ausnahmen sind: 1. C 4 Deckplatte und luftgefüllter Hohlraum, 2. 10 mm Holzplatte mit 7 Löchern von 10 mm Durchmesser, Hohlraum mit loser Watte gefüllt. Für 1. liegt die gemessene Frequenz über der berechneten, für 2. stimmen beide Frequenzen überein. Die Abweichungen sind im allgemeinen am größten in den Fällen, wo die C 4 Deckplatte benutzt wird. Die Löcher sind aber hier auch etwas unregelmäßig und nicht ganz scharfkantig. Die 2. Abweichung scheint darauf zu deuten, daß die Übereinstimmung gut ist, wenn die Lochabmessungen genau sind und die Füllung des Hohlraumes lose ist. (Die Berechnung setzt ja auch luftgefüllten Hohlraum voraus).

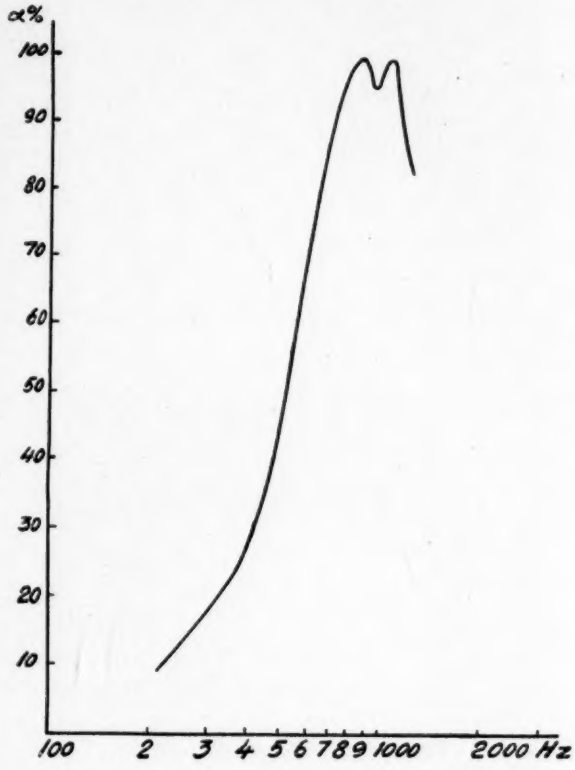

Abb. 3. Schluckgrad-Frequenzkurve für Acousti-Celotex B 3

3. Die Schallschluckung durch resonatorähnliche Schallschluckanordnungen

Die schallschluckende Wirkung von durchlöcherten Platten, die vor einer starren Wand angebracht sind, ist schon lange bekannt. WENTE und BEDELL[5]) haben Schallschluckmessungen von durchlöcherten Holzplatten nach der Rohrmethode vorgenommen und gezeigt, daß man bei Aufstellung von mehreren Platten hintereinander eine beträchtliche Schallschluckung über das ganze Frequenzspektrum erzielen kann. Sie geben keine

[3]) CRANDALL, Theory of vibrating Systems and Sound, S. 54 (69).

[4]) CRANDALL, Theory of vibrating Systems and Sound, S. 55 (69a).

[5]) WENTE u. BEDELL, Bell System Techn. J. 7 (1928), S. 1.

Tabelle 1

Schallschluckanordnung

Lochzahl	Lochdurchmesser	Lochtiefe	Wandabstand	Plattenmaterial	Füllung	Resonanzfrequenz berechnet	Resonanzfrequenz gemessen
41	0,45	1,0	2,2	C 4	C 4	855	660
41	0,45	1,0	1,6	C 4	Filz	1000	740
41	0,45	1,0	2,2	C 4	Luft	855	980
41	0,45	1,0	1,6	Holz	Filz	1000	910
41	0,45	1,0	2,2	Messing	Luft + Filz	855	800
41	0,45	1,0	2,2	„	Filz	855	800
41	0,45	1,0	1,6	„	„	1000	900
7	1,0	1,0	1,6	Holz	„	800	700
1	1,0	1,0	1,6	„	„	300	—
41	0,22	1,0	1,6	„	„	525	480
7	1,0	1,0	1,6	„	Watte	800	800
41	0,3	0,1	1,6	Pappe	Filz	1340	1100
41	0,52	0,1	1,6	„	„	1890	1600
41	0,52	0,1	2,7	„	„	1450	1150
21	0,52	0,1	1,5	„	„	1390	1100

Theorie an. WINTERGERST[6]) hat auf die Möglichkeit einer 100prozentigen Schallschluckung mittels einer durchlöcherten Wand hingewiesen. RSCHEVKIN[7]) untersucht die Wirkung von HELMHOLTZschen Resonatoren auf den Nachhallprozeß eines Raumes und zeigt, daß zwei prinzipiell verschiedene Wirkungen vorhanden sind: 1. Eine Verlängerung der Nachhallzeit infolge der scheinbaren Volumenvergrößerung des Raumes durch die in den (wenig gedämpften) Resonatoren vorhandene akustische Energie. 2. Eine Verkürzung der Nachhallzeit infolge der Schallschluckung der Resonatoren. Er hat die Verlängerung der Nachhallzeit nachgewiesen (als Resonatoren wurden Flaschen benutzt), die dann auftritt, wenn die Resonatoren wenig gedämpft sind, und weist auf die Möglichkeiten hin, welche die Resonatoren bieten, wenn sie als schallschluckende Wandbekleidung ausgebildet werden. W. ZELLER[8]) berechnet die Dämpfung von Resonatoranordnungen und mißt die dämpfende Wirkung von in Lüftungskanälen angebrachten Resonatoren. W. WILLMS[9]) hat vor kurzem einige Messungen der Schallschluckung von durchlöcherten Platten veröffentlicht. Die Dämpfung wurde durch poröse Schallschluckstoffe erreicht.

4. Einfache Theorie der Schallschluckung von Resonatoren

Es werden ebene Schallwellen und gleichphasige Erregung der Resonatoren vorausgesetzt. Abb. 4 zeigt die durchlöcherte Platte

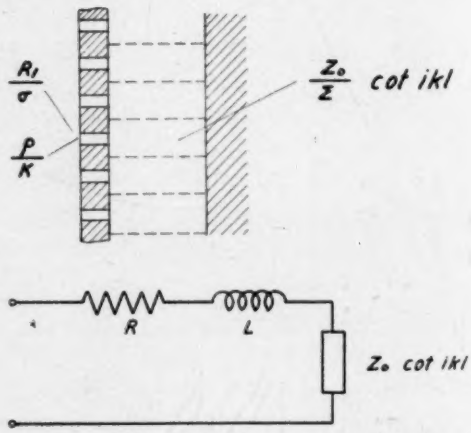

Abb. 4. Resonatoranordnung und ihre elektrische Analogie

vor einer festen Wand. Das analoge elektrische Schaltbild ist darunter angegeben. Die Analogie läßt sich folgendermaßen aufstellen:

[6]) WINTERGERST, Z. techn. Phys. 16 (1935), S. 569.
[7]) RSCHEVKIN, Techn. Phys. USSR. 3 (1936), Nr. 6.
[8]) W. ZELLER, Akust. Z. 3 (1938), S. 32.
[9]) W. WILLMS, Akust. Z. 4 (1939), S. 29.

Elektrisch:

R = Ohmscher Widerstand (OHM),
L = Selbstinduktivität (HENRY),
Z_0 = Scheinwiderstand (OHM),
$-iZ_0 \cot kl$, Scheinwiderstand einer offenen Leitung von der Länge l.

Akustisch:

$\frac{R_1}{\sigma}$ = Strömungswiderstand je Loch (gcm^{-4} sec^{-1}),

$\frac{\varrho}{K}$ = akustische Masse je Loch (gcm^{-4}),

$\frac{Z_0}{\Sigma} = \frac{\text{akustischer Scheinwiderstand der Luft}}{\text{Querschnittfläche je Resonator } (cm^2)}$

$-i\frac{Z_0}{\Sigma}\cot kl$, akustischer Scheinwiderstand einer Luftsäule von der Länge l vor einer starren Wand-Querschnittfläche je Resonator ($gcm^{-4}\,sec^{-1}$).

Es bedeuten:

ϱ = Dichte der Luft in g/cm^3,
σ = Lochfläche in cm^2,
Σ = Querschnitt eines Resonators in cm^2, entsprechend der virtuellen Aufteilung des Luftraumes hinter den Löchern (s. Abb. 4),
K = „Leitfähigkeit" eines Loches gegeben durch

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{2r_0} + \frac{b}{\pi r_0^2}\ (cm^{-1})$$

$2r_0$ = Lochdurchmesser in cm,
b = Plattendicke in cm,
k = Wellenzahl, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$,
l = Wandabstand der Platte in cm.

Man erhält folgenden Ausdruck für den Scheinwiderstand eines Resonators:

$$(3) \qquad Z_r = \frac{R_1}{\sigma} + i\omega\frac{\varrho}{K} - \frac{iZ_0}{\Sigma}\cot kl,$$

zur Erzielung einer 100prozentigen Schallschluckung muß $Z_r = \frac{Z_0}{\Sigma}$ sein, d. h.

$$(4) \qquad \frac{R_1}{\sigma} = \frac{Z_0}{\Sigma}$$

und

$$(5) \qquad \omega\frac{\varrho}{K} = \frac{Z_0}{\Sigma}\cot kl,$$

(5) entspricht der von WINTERGERST[6]) aufgestellten Bedingung.

Die Resonanzfrequenz läßt sich aus (5) nicht berechnen. Nimmt man aber an, daß der Wandabstand l klein ist im Vergleich zur Wellenlänge des Schalles, d. h. $kl \ll 1$, kann man $\cot kl$ durch $\frac{1}{kl}$ ersetzen. Man erhält somit:

$$\omega\frac{\varrho}{K} = \frac{Z_0}{\Sigma}\frac{1}{kl},\ \text{d. h.}\ \omega_{res} = c\sqrt{\frac{K}{V}}$$

wegen $Z_0 = \varrho c$ und mit $\Sigma l = V$.

Dem Übergang von l groß zu l klein im Verhältnis zur Wellenlänge entspricht es (im elektrischen Fall), daß man den Scheinwiderstand $-iZ_0 \cot kl$ durch den kapazitiven Widerstand $\frac{1}{i\omega C}$ ersetzt.

5. Allgemeines über die Dämpfung der Resonatoren

Die Dämpfung der Resonatoren kann auf mehrere prinzipiell verschiedene Weisen erreicht werden.

1. Die Dämpfung beschränkt sich auf den Reibungswiderstand in der Öffnung (Randreibung und Reibung im Lochinnern).

2. Die Dämpfung kommt zustande durch eine dünne poröse Schicht, die dicht am Loch angebracht ist.

3. Die Dämpfung kommt zustande durch eine poröse Schicht, die an der Hinterwand angebracht ist.

4. Die Dämpfung kommt durch Ausfüllung des Hohlraumes mit einem porösen Stoff zustande.

5. Die Dämpfung kommt zustande durch eine poröse Schicht, die einige cm vor der Platte angebracht ist.

Die Methoden 1, 2, 4 und 5 sind alle praktisch verwendbar. 3 dagegen nicht, denn die Dämpfung erfolgt in diesem Falle an einer Stelle, an der die Schallschnelle klein ist. Das 4. Verfahren ist schon häufig kommerziell verwandt worden (nicht nur Verwendung von Acousti-Celotex, sondern auch von durchlöcherten Faserplatten, die z. B. vor Mineralwolle angebracht werden). Auch Methode 5 ist verwandt worden (WILLMS[9])). Wegen der praktischen und theoretischen Einfachheit scheint es aber auch wünschenswert, daß 1 und 2 Verwendung finden sollten.

6. Die Breite der Resonanzspitze

Der Schluckgrad α läßt sich im elektrischen Fall folgendermaßen ausdrücken:

$$\alpha = \frac{4\,\frac{R}{Z_0}}{\left(\frac{R}{Z_0}+1\right)^2+\left(\frac{L\,\omega-1/C\,\omega}{Z_0}\right)^2} \tag{6}$$

$$\alpha = \frac{4\,\frac{R}{Z_0}}{\left(\frac{R}{Z_0}+1\right)^2+\left(\frac{L/C}{Z_0^2}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_{res}}-\frac{\omega_{res}}{\omega}\right)^2}. \tag{7}$$

Wenn $\omega = \frac{\omega_{res}}{\sqrt{2}}$, wird

$$\alpha_{(\sqrt{2})} = \frac{4\,\frac{R}{Z_0}}{\left(\frac{R}{Z_0}+1\right)^2+\frac{L/C}{2Z_0^2}}. \tag{8}$$

Im akustischen Fall hat man:

$$\alpha_{(\sqrt{2})} = \frac{4\,\frac{R_1/n\,\sigma}{Z_0/n\,\Sigma}}{\left(\frac{R_1/n\,\sigma}{Z_0/n\,\Sigma}+1\right)^2+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\varrho/n\,K}{n\,V/\varrho\,c^2}}{Z_0^2/n^2\,\Sigma^2}} \tag{9}$$

(n ist die Zahl der Löcher auf der Fläche S cm²).

Aus (9) geht hervor, daß $\alpha_{(\sqrt{2})}$ um so größer wird, je näher $R_1/n\,\sigma$ dem Wert $Z_0/n\,\Sigma$ kommt, und außerdem hängt $\alpha_{(\sqrt{2})}$ ab von der Größe

$$\beta = \frac{\frac{\varrho/n\,K}{n\,V/\varrho\,c^2}}{Z_0^2/n^2\,\Sigma^2} = \frac{S}{K\cdot l\cdot n},$$

wobei $\Sigma\cdot n = S$ und $V = l\cdot\Sigma$;

β kann auch geschrieben werden:

$$\beta = \frac{c^2}{\omega_{res}^2\,l^2\,n}.$$

$\alpha_{(\sqrt{2})}$ wird um so größer, je kleiner β wird, d.h. je größer l und n werden. Für eine gegebene Resonanzfrequenz muß man deswegen, um eine möglichst breite Schallschluckkurve zu bekommen, möglichst viele Löcher (pro Flächeneinheit) und möglichst große Hohlraumtiefe anstreben. Man sieht außerdem, daß von diesen beiden Maßnahmen die letzte die wirksamere ist. Es ist weiter zu bemerken, daß auch die Dicke der Deckplatte von Bedeutung ist.

Aus

$$\beta = \frac{S}{K\cdot l\cdot n}$$

ersieht man, daß die Kurvenbreite mit wachsendem K wächst, d. h. für Kreisöffnungen wächst sie mit wachsendem r_0 und abnehmendem b, da

$$\frac{1}{K} = \frac{l}{2\,r_0}+\frac{b}{\pi\,r_0^2}.$$

Unter Umständen kann es deswegen günstiger sein, wenige Löcher in einer dünnen Platte statt viele Löcher in einer dicke Platte zu verwenden.

7. Schallschluck-Frequenzkurven für verschiedene Resonatoranordnungen

a) Messungen in App. 2. (Durchmesser 28,8 cm.)

Beispiel 1. 2,7 mm Pappe. 9 Löcher von 5,6 mm Durchmesser in quadratischem Muster. Lochabstand 72 mm. Wandabstand 26 mm.

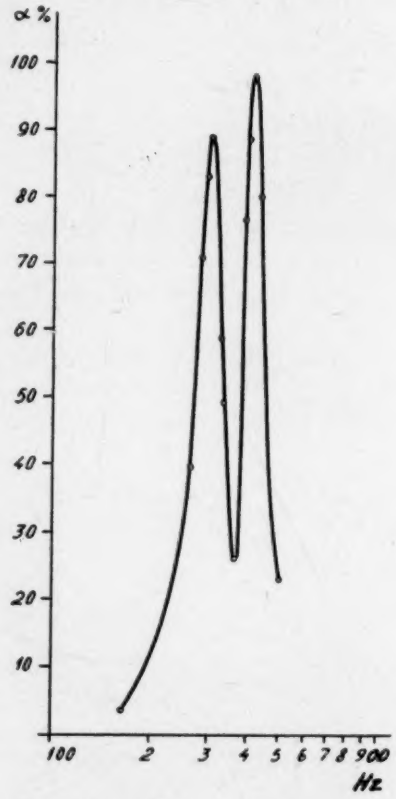

Abb. 5. Schluckgrad-Frequenzkurve für Resonatoranordnung Beispiel 1

Abb. 5 zeigt die aufgenommene Kurve. Es sind zwei Absorptionsmaxima vorhanden bei 310 und bei 415 Hz. Nach der Berechnung mußte man ein Maximum bei 234 Hz erwarten. Um eine Erklärung für diese Nichtübereinstimmung zu finden, wurde angenommen, daß zwei Resonanzerscheinungen auftreten: 1. die Helmholtzsche Resonanzerschei-

nung, 2. eine Resonanzwirkung der Plattenmasse und der Luftsteifheit hinter der Platte[10]). Die entsprechende Resonanzfrequenz liegt hier bei 309 Hz. (Das Flächengewicht der Pappe: 0,16 g/cm²). Diese Frequenz stimmt genau mit der des niedrigsten der beiden Absorptionsmaxima überein. Als Kontrolle wurde außerdem die Schallschluckkurve einer undurchlöcherten Pappe-Platte aufgenommen (Abb. 6). Die Kurve hat nur ein Maximum und zwar genau wie vorher bei 310 Hz.

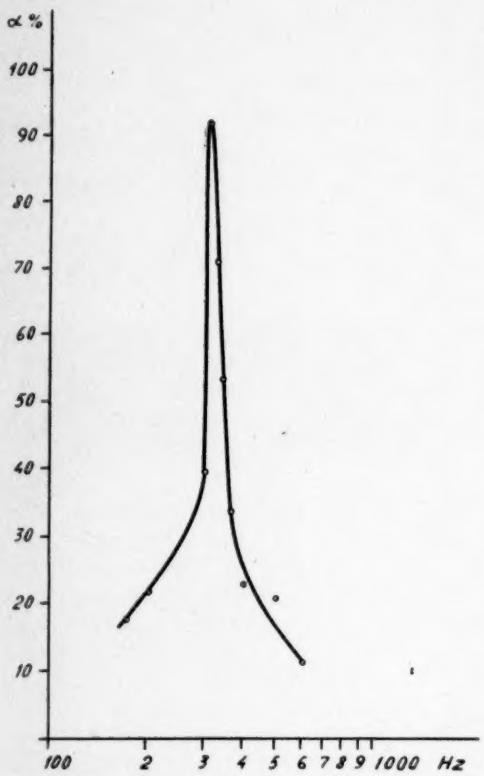

Abb. 6. Schluckgrad-Frequenzkurve für 2,7 mm Pappeplatte. Wandabstand 26 mm, Flächengewicht 0,16 gr/cm²

Das zweite Maximum bei 415 Hz läßt sich erklären, wenn man annimmt, daß die beiden Massenkomponenten (das Flächengewicht der Platte und die akustische Masse der Luft in den Löchern) „parallel" verbunden sind. Bei dieser Annahme ergibt sich als „resultierende Masse":

$$n = \frac{m\,\frac{\varrho}{K}}{m + \frac{\varrho}{K}},$$

wo m das Flächengewicht der Platte ist. Die entsprechende Resonanzfrequenz wird 389 Hz, d. h. 6—7 % kleiner als die des zweiten Absorptionsmaximums, eine Übereinstimmung, die jedenfalls nicht ganz befriedigend ist. Es ist möglich, daß gekoppelte Kreise eine bessere Erklärung geben würden.

[10]) Siehe E. Meyer, Elektr. Nachr.-Techn. 13 (1936), S. 95.

Beispiel 2. Holzplatte von 20 mm Dicke. Wandabstand 26 mm. 7 Löcher von 13 mm Durchmesser. Lochabstand 96 mm (quadratisches Muster).

Abb. 7 zeigt die aufgenommene Kurve, die zwei Maxima aufweist, ein kleineres bei 185 Hz und ein größeres bei 260 Hz. Das erste wird wohl die Wirkung einer Eigenschwingung der Platte sein; das zweite stimmt ungefähr mit der berechneten Resonatorfrequenz 233 Hz überein.

Es ist nicht undenkbar, daß solche Plattenschwingungen einen Einfluß auf die Lage der Helmholtzschen Resonanz ausüben. Um dieses zu vermeiden, wurden die Versuche in App. 1 fortgesetzt, da es bei dem kleineren Rohrdurchmesser (9,75 cm) leichter ist, eine größere Steifheit der Platte zu erreichen.

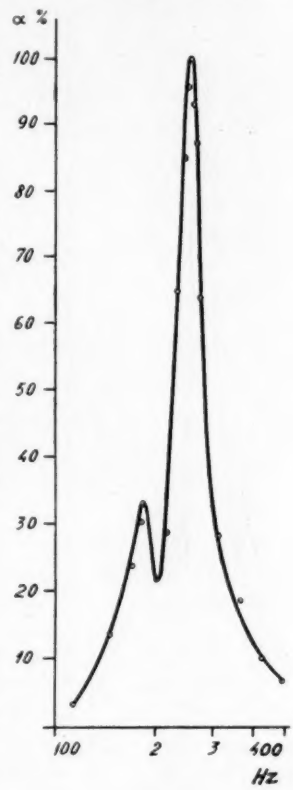

Abb. 7. Schluckgrad-Frequenzkurve. Beispiel 2

b) Messungen in App. 1.

Beispiel 3. Holzplatte von 20 mm Dicke. Zahl der Löcher: 1, 3 oder 7. Lochdurchmesser 13 mm. Wandabstand 7 oder 15 mm.

Die Bestimmung der Resonanzfrequenz (Frequenz maximaler Schallschluckung) wurde in einigen Fällen sowohl durch Messung des Schallschluckgrades als auch durch Einstellung auf maximale Schalldruckamplitude im Hohlraum vorgenommen. Die Tabelle 2 zeigt eine Zusammenstellung von gemessenen und berechneten Werten.

Tabelle 2.

Wandabstand 7 mm			
Zahl der Löcher:	1	3	7
f_{Res} (max. Schallschluckung)	508	825	—
f_{Res} (max. Druckamplitude)	—	—	—
f_{Res} (berechnet)	493	852	—
Wandabstand 15 mm			
f_{Res} (max. Schallschluckung)	—	586	885
f_{Res} (max. Druckamplitude)	—	580	880
f_{Res} (berechnet)	—	588	905

Die Übereinstimmung ist gut bei 3 Löchern und 15 mm Wandabstand. Es scheint, als ob zwei Abweichungen von dem einfachen theoretischen Resonatorbild vorhanden sind: 1. Bei dem kleinen Wandabstand wird die Leitfähigkeit der Löcher größer, als die Formel $\frac{1}{K} = \frac{1}{2 r_0} + \frac{b}{\pi r_0^2}$ voraussetzt. 2. Wenn mehrere Löcher vorhanden sind, wird die Leitfähigkeit eines Loches etwas kleiner, als die Formel voraussetzt.

Die Versuchsresultate genügen nicht zur näheren Untersuchung dieser Abweichungen.

Die Abhängigkeit der Resonanzlage vom Wandabstand wurde in einem folgenden Versuch untersucht.

Beispiel 4. 1 mm dicke Messingplatte mit einem Loch von 23 mm Durchmesser. Die Tabelle 3 zeigt die gemessenen und berechneten Werte der Resonanzfrequenz.

Tabelle 3.

Wandabstand	15 mm	30 mm
f_{Res} (max. Schallschluckung)	850	570
f_{Res} (max. Druckamplitude)	845	588
f_{Res} (berechnet)	745	533

Die berechneten Werte liegen niedriger als die gemessenen, und die relative Abweichung ist am größten bei dem kleinen Wandabstand, was ja auch zu erwarten ist.

Beispiel 4 ist zugleich das Beispiel eines Resonators, für welchen K annähernd gleich $2 r_0$ ist. Als nächstes Beispiel wurde ein Resonator untersucht, für welchen K gleich $\frac{\pi r_0^2}{b}$ ist.

Beispiel 5. 28,5 mm dicke Holzplatte, 97 Löcher von 1,9 mm Durchmesser, 7 mm Wandabstand. f_{Res} wird zu 636 Hz gemessen. Die Berechnung gibt 720 Hz. Der Unterschied beruht in diesem Fall darauf, daß die Luftträgheit durch Reibung in den Löchern größer wird.

RSCHEVKIN[7]) hat angegeben, daß das Massenglied des akustischen Scheinwiderstandes mit Rücksicht hierauf geschrieben werden kann:

$$\frac{\varrho}{K}\omega + \frac{b}{r_0}\sqrt{2\varrho\mu\omega},$$

μ ist der Reibungskoeffizient von Luft ($= 2 \times 10^{-4}$).

Das Korrekturglied zeigt sich als unzulänglich, um die Verschiebung der Resonanzlage zu erklären. Man kann annehmen, daß die Reibung im Lochinnern, die nach RSCHEVKIN[7]) (siehe auch WEST, Acoustical Engineering S. 318) durch

$$R_1 = \frac{b}{r_0}\sqrt{2\varrho\mu\omega}$$

gegeben ist, in der Tat wesentlich größer ist, was eine entsprechende Vergrößerung des Massenglieds zufolge hat.

Berechnet man zunächst die maximale Schallschluckung unter der Annahme $R_1 = \frac{b}{r_0}\sqrt{2\varrho\mu\omega}$, erhält man den Wert 84,5 %. Gemessen wurde 86 %.

Die Berechnung ist aber nicht eindeutig, denn derselbe Wert von α_{max} wird in zwei Fällen vorkommen, nämlich sowohl für $\frac{R_1}{\sigma} > \frac{Z_0}{\Sigma}$ als auch für $\frac{R_1}{\sigma} < \frac{Z_0}{\Sigma}$.

Durch eine Schluckgradbestimmung läßt sich nicht entscheiden, welcher Fall tatsächlich vorliegt; aber aus der Lage der Druckminima im Meßrohr wird man Schlüsse ziehen können, die eine Entscheidung erlauben. Es zeigt sich, daß hiernach $\frac{R_1}{\sigma} > \frac{Z_0}{\Sigma}$ sein muß.

Geht man jetzt von dem gemessenen Wert für α_{max} (86%) aus und berechnet R_1 und das Korrekturglied der Masse, erhält man als Resonanzfrequenz 650 Hz.

Es kann als bestätigt angesehen werden, daß die wirkliche Reibung wesentlich größer als die theoretische ist.

100% Schallschluckung erreicht man theoretisch, wenn der Strömungswiderstand im Loch dem Schallwellenwiderstand der Luft angepaßt ist, d. h. wenn

$$\frac{R_1}{\sigma} = \frac{Z_0}{\Sigma}.$$

Der als Beispiel 5 untersuchte Resonator hatte, wie gezeigt, einen Strömungswiderstand von der richtigen Größenordnung. Dagegen muß man annehmen, daß der als Beispiel 4 untersuchte Resonator mit einem Loch von 23 mm Durchmesser und nur 1 mm Wanddicke einen viel zu kleinen Strömungswiderstand haben muß. Trotzdem hat es sich gezeigt, daß eine maximale Schallschluckung von über 80% vorhanden war. Als Ursache wurde angenommen, daß die nur 1 mm dicke Messingplatte bei dem großen Resonanzschalldruck in Schwingungen versetzt wird und dadurch Schall absorbiert. Um diese Annahme zu bestätigen, wurde die Platte durch Aufschrauben von Winkelmessing abgesteift, wonach das Maximum auf 21% Absorption herunterfiel.

Eine Anpassung des Strömungswiderstandes im Loch wurde danach versucht.

Beispiel 6. 1 mm Messingplatte (abgesteift), 30 mm Wandabstand, 23 mm Lochdurchmesser, ein Stück Leinen (Strömungswiderstand etwa 5 akustische Ohm ($g/cm^{-2}\,sec^{-1}$)) vor dem Loch aufgeklebt.

Die aufgenommene Kurve ist in Abb. 8 wiedergegeben. Das Maximum befindet sich bei 550 Hz (berechnete Frequenz 553 Hz) und die maximale Schallschluckung beträgt etwa 95%, was einigermaßen mit dem aus der Größe des Strömungswiderstandes berechneten Maximum übereinstimmt (etwa

89%). Die Breite der Kurve ist ziemlich groß und ist fast so groß wie diejenige von Acousti-Celotex C 4 (Abb. 1).

Um die Wirkung eines zu hohen Strömungswiderstandes zu untersuchen, wurde noch ein Leinenstück mit viel höherem Widerstand benutzt.

Beispiel 7. Wie 6. Strömungswiderstand 45 akustische Ohm.

Die Abb. 9 zeigt die aufgenommene Kurve. Das Maximum ist auf 58% heruntergefallen, und die Kurve ist spitzer geworden. Der Resonanzpunkt liegt jetzt bei 400 Hz; die Ursache der Verschiebung ist nicht einleuchtend.

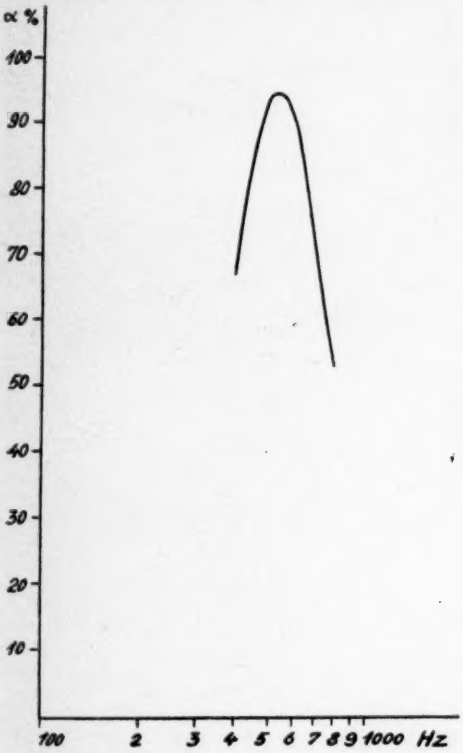

Abb. 8. Schluckgrad-Frequenzkurve. Beispiel 6

Um die Wirkung einer Dämpfung des Hohlraumes zu untersuchen, wurde ein Resonator mit Filzeinlage untersucht.

Beispiel 8. Wie 6, ohne Leinenstück im Loch, aber mit 8 mm Filz auf der Hinterwand.

Die aufgenommene Kurve zeigt eine maximale Schallschluckung von etwa 52%. Theoretisch läßt sich der vorliegende Fall behandeln mit Hilfe der elektrischen Analogie; die Filzbekleidung entspricht einem Parallelwiderstand zur Kapazität. Somit hat sie auch einen Einfluß auf den effektiven Strömungswiderstand des Resonators. Die gemessene Größe des Schallschluckmaximums liegt etwas höher als die berechnete.

Die Filzeinlage bewirkt somit eine mäßige Absorption; aber es ist einleuchtend, daß eine optimale Schallschluckkurve nicht in dieser Weise erreichbar ist. Es wurde schließlich untersucht, ob die Filzeinlage eine Wirkung ausübt, wenn der Resonator schon mit einem Leinenstück im Loch gedämpft ist.

Beispiel 9. Wie 8. Leinenstück (5 akustische Ohm) im Loch.

Die Wirkung des Filzes ist in diesem Falle vernachlässigbar klein, wie ein Vergleich von Abb. 8 und Abb. 10 zeigt. Auf den schon fast optimal gedämpften Resonator hat die Dämpfung des Hohlraumes keinen merkbaren Einfluß.

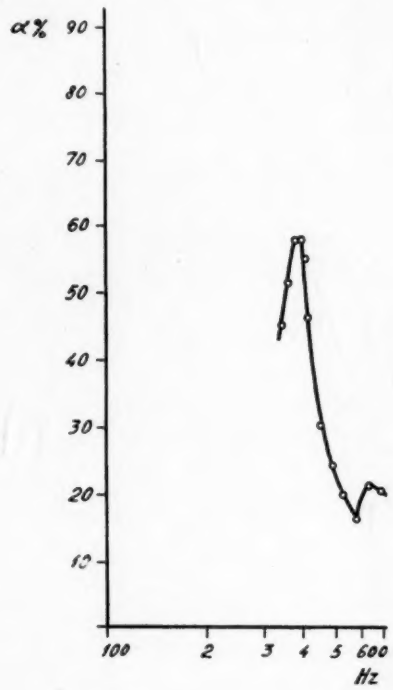

Abb. 9. Schluckgrad-Frequenzkurve. Beispiel 7

8. Resonatordämpfung

Die verschiedenen prinzipiellen Möglichkeiten der Dämpfung der Resonatoren sind schon besprochen worden, und mehrere davon, nämlich die Dämpfung durch eine poröse Schicht vor dem Loch oder auf der Hinterwand, sind auch experimentell untersucht worden.

Es hat sich dabei gezeigt, daß ein geeigneter Aufbau der Resonatoren erreicht wird, wenn der Hohlraum ungedämpft ist, und die Löcher durch poröses Material gedämpft werden.

Es ist nun auch zu untersuchen, ob man bei geeigneter Wahl der Lochgröße dem natürlichen Strömungswiderstand eines Loches eine solche Größe geben kann, daß die Dämpfung des Resonators dadurch angepaßt wird.

Zu dieser Untersuchung wurde App. 2 benutzt, und als Resonator wurde (um die Wirkung von Plattenschwingungen ganz auszuschalten) eine Messingschale mit einer 10 mm dicken Messingplatte benutzt. Es war nur ein Loch vorhanden, dessen Durchmesser von 5 bis 20 mm verändert wurde. Die Resonanzlage

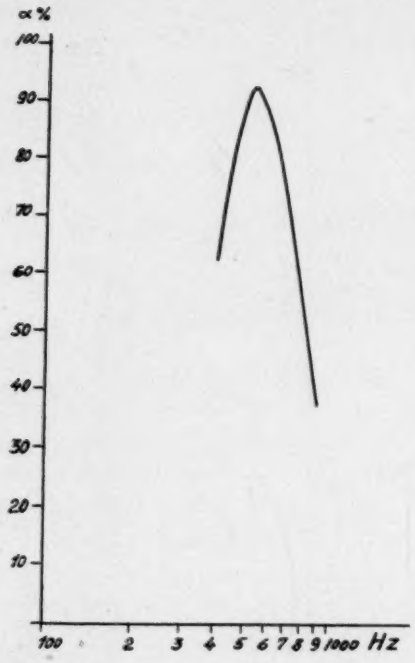

Abb. 10. Schluckgrad-Frequenzkurve. Beispiel 9

wurde für jede Lochgröße eingestellt und das Schallschluckmaximum gemessen. Es ergab sich die in Abb. 11 wiedergegebene Abhängigkeit zwischen Lochgröße und maximaler Schallschluckung. Man sieht, daß eine Anpassung tatsächlich bei etwa 16 mm Durchmesser vorhanden ist.

Eine Berechnung des Reibungswiderstandes $R_1 = \frac{b}{r_0} \sqrt{2 \varrho \mu \omega}$ (s. S. 84), in der nur die Reibung im Lochinnern berücksichtigt wird, und ein Vergleich mit den experimentell gefundenen Werten zeigt, daß diese 3—4mal höher als die berechneten liegen. Dieses deutet darauf hin, daß der wesentlichste Anteil der Reibung die Randreibung ist. Übrigens zeigt eine Platte mit mehreren Löchern auch eine bessere Übereinstimmung zwischen berechnetem und gemessenem Reibungswiderstand.

9. Allgemeines über die praktische Anwendung von Resonatoranordnungen

Bei der praktischen Ausführung von Resonatoranordnungen kommt folgendes in Frage:

Durchlöcherte Platten aus Holz, Fibermaterial oder in Sonderfällen Metall werden in einigen cm Abstand vor der Wand angebracht. Es muß für eine Aufteilung des Hohlraumes gesorgt werden, denn eine gleichphasige Anregung

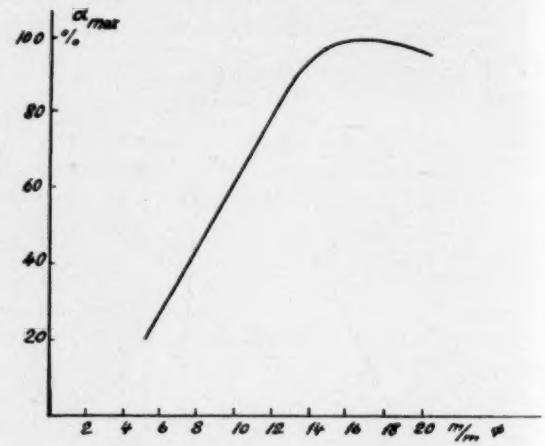

Abb. 11. α_{max} als Funktion der Lochgröße eines Resonators

muß stets vorausgesetzt werden können, d. h. die Aufteilung muß z. B. in Quadraten erfolgen, deren Seitenlänge nicht größer als eine Viertelwellenlänge des Schalles ist. Außerdem muß dafür gesorgt werden, daß die Platten möglichst steif sind, damit sie nicht mitschwingen und die Schallenergie nicht wieder ausgestrahlt wird.

Die Dämpfung der Resonatoren läßt sich in folgender Weise bequem ausführen:

1. Ziemlich große Löcher (0,5—2 cm) mit porösem Tuch bedeckt (für Anpassung

des Strömungswiderstandes muß gesorgt werden.)
2. Kleine Löcher oder evtl. Schlitze, deren natürlicher Reibungswiderstand der gewünschten Dämpfung entspricht.
3. Poröses Material hinter der Platte (nicht ganz zweckmäßig).

Um eine gute Schallschluckung über einem großen Frequenzbereich zu erreichen, kann man entweder mehrere Lochgrößen, mehrere Hohlraumtiefen oder mehrere Platten (mit verschiedenen Lochgrößen) hintereinander verwenden. Die letzte Maßnahme wird voraussichtlich die praktischere sein.

(Eingegangen am 12. September 1939.)

Untersuchungen über die Schalleitung in wassergefüllten Rohren

Von Eugen Ganitta

Mitteilung aus dem Institut für Schwingungsforschung an der Technischen Hochschule Berlin

(Mit 16 Textabbildungen)

Einleitung

Das Problem der Schalleitung in wassergefüllten Rohren unterscheidet sich gegenüber dem gleichen Problem in Luft wesentlich dadurch, daß im ersten Falle zwischen dem Schallmedium und dem Rohrmaterial eine enge akustische Kopplung besteht. Im Gegensatz dazu lassen sich für das Schallmedium Luft in den meisten Fällen wegen der um Größenordnungen unterschiedlichen akustischen Widerstände praktisch ausreichend definierte Verhältnisse erzielen. Man wird z. B. ein Glas- oder Messingrohr gegenüber Luft als absolut starr annehmen können, so daß man hier außer der Wandreibung keine Beeinflussung des Schallvorganges in Rechnung zu setzen braucht, also Rohr und Luft als voneinander unabhängige Systeme auffassen kann. Für das Schallmedium Wasser dagegen ist eine derartige Annahme überhaupt nicht oder nur in grober Annäherung zulässig. Man muß vielmehr Wasser und Rohr als ein einziges System auffassen, das als Ganzes an dem Schallvorgang beteiligt ist. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß die Rohrwand durch ihr Mitschwingen den Schwingungszustand der Wassersäule, und diese ihrerseits den der Rohrwand beeinflußt. Diese gegenseitige Beeinflussung äußert sich für den Schallverlauf im Wasser — der hier betrachtet werden soll — in einer Änderung der Schallgeschwindigkeit und im Auftreten einer zusätzlichen Dämpfung, da ja in der Rohrwand selbst durch das Mitschwingen Energie verzehrt wird. Das Ausmaß dieser Änderung und die zusätzliche Dämpfung hängen naturgemäß sowohl von den physikalischen als auch von den geometrischen Daten des Systems ab. In vorliegender Arbeit wurden Schalluntersuchungen im Gebiete der Hörfrequenzen an wassergefüllten Rohren durchgeführt, die hauptsächlich den Zweck hatten, quantitative Angaben über die Dämpfung und die Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Rohren zu machen.

A. Theoretischer Teil

I. Die Schallverhältnisse im Wasser

Um über die akustischen Verhältnisse im Wasser einen Überblick zu gewinnen, werden im folgenden Abschnitt die Verhältnisse im freien Medium, dann der Einfluß der Wandreibung beim Wasserschall im Rohr und schließlich die Einwirkung elastischer Rohre auf die Schallgeschwindigkeit und die Dämpfung kurz diskutiert.

Für das freie Wasser[1]) beträgt die Schallgeschwindigkeit c_0 bei einer Temperatur von 8° C 1441 [m/sec]. Der Schallabsorptionskoeffizient im freien Medium als Folge der inneren Reibung ist nach STOKES[2]) gegeben durch

$$(1) \qquad \beta_0 = \frac{8\pi^2 \cdot \mu}{3 \cdot c_0^3 \cdot \varrho} \cdot n^2 \,[\mathrm{cm}^{-1}]$$

μ = Koeffizient der inneren Reibung, ϱ = Dichte des Wassers, n = Frequenz. β_0 nimmt demnach mit dem Quadrate der Frequenz zu. Berechnet man für eine ebene Schallwelle bei einigen Frequenzen die Entfernung, in welcher der Schallpegel beispielsweise um 1 db abnimmt, so ergeben sich noch bei hohen Frequenzen beträchtliche Entfernungen. Setzt man für Wasser die Werte $\mu = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ [g/cm · sec], $\varrho = 1$ [g/cm³] und $c_0 = 1{,}44 \cdot 10^5$ [cm/sec] ein, dann erhält man für 300 Hz erst nach ungefähr 10^5 km eine Pegelabnahme von 1 db und für 10000 Hz nach ungefähr 100 km. Bei Messungen in Rohren spielt also die Mediumabsorption keine Rolle.

Die Schallschwächung unter Berücksichtigung der Reibung des Mediums an der Rohrwand läßt sich durch folgende Beziehung für den Dämpfungsfaktor abschätzen:

$$(2) \qquad \beta_w = \frac{1}{R \cdot c_0} \cdot \sqrt{\pi \cdot \frac{\mu}{\varrho}} \cdot \sqrt{n} = A \cdot \sqrt{n} \,[\mathrm{cm}^{-1}].$$

R ist der Rohrradius in cm. Der Koeffizient A ergibt für einen Rohrradius von 4 cm den Wert $3{,}2 \cdot 10^{-7}$ [sec$^{1/2}$/cm]. Damit würde für 3000 Hz eine Schwächung des Schallpegels um ein db bereits bei etwa 65 m Rohrlänge erreicht werden. D. h. also, daß diese Dämpfung die bloße Mediumabsorption um Größenordnungen übertrifft. Der Einfluß der Wandreibung auf die Schallgeschwindigkeit ist unbedeutend.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, sind Rohr und Wassersäule für den Schallvorgang als ein System zu betrachten. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache hat KORTEWEG[3]) in seiner Arbeit „Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in elastischen Röhren" eine Formel für die Schallgeschwindigkeit der Wassersäule abgeleitet, die den Zusammenhang zwischen der Schallgeschwindigkeit im freien Medium und der im Rohr in Abhängigkeit von den physikalischen und geometrischen Daten des Rohres angibt. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Ringelemente des Rohres unabhängig voneinander reine Pulsationsschwingungen ausführen, ergibt sich nach seiner Theorie für die Schallgeschwindigkeit in der Wassersäule c_r der Ausdruck

$$c_r = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \dfrac{2 \cdot \varrho \cdot c_0^2 \cdot R}{\left(1 - \dfrac{5a}{6R}\right) \cdot a \cdot E}}}.$$

c_0 = Schallgeschwindigkeit im freien Medium,
E = Elastizitätsmodul des Rohrmaterials,
ϱ = Dichte des Wassers,
a = Wandstärke des Rohres,
R = Innendurchmesser des Rohres.

Setzt man $\frac{R}{a \cdot E} = N$ und $\frac{\varrho}{1 - \frac{5a}{6R}} = \varepsilon$, so geht die Formel über in

$$(3) \qquad c_r = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot c_0^2 \cdot N}}.$$

N wird — entsprechend der geläufigen Vorstellung — als Nachgiebigkeit des Rohres definiert.

Um gleichfalls auch Schlüsse auf eine Dämpfung infolge des Mitschwingens der Rohrwand ziehen zu können, wird unter Voraussetzung sinusförmiger Schwingungen für das Rohrmaterial eine komplexe Nachgiebigkeit bzw. ein komplexer Elastizitätsmodul $E^* = E(1 + i\eta)$ angenommen. Die Zahl η kennzeichnet die Energieverluste im Rohrmaterial[4]) und hat für Eisen, Messing, Glas und Gummi etwa die Größe $\eta_E \sim 5 \cdot 10^{-4}$, $\eta_M \sim 1 \cdot 10^{-3}$, $\eta_{Gl} \sim 2 \cdot 10^{-3}$, $\eta_G \sim 1 \cdot 10^{-1}$. (Dies sind Mittelwerte, da η nach BENNEWITZ einen Frequenzgang aufweist; für Gummi bleibt es, wie unveröffentlichte Messungen im Institut ergaben, weitgehend konstant; zwischen η und dem logarithmischen Dekrement besteht die Beziehung $\pi\eta = \Lambda$.) Führt man den komplexen E-Modul in Gl. 3 ein, so ergibt sich nach einfacher Umrechnung, wobei Glieder höherer Ordnung in η vernach-

[1]) F. AIGNER, Unterwasserschalltechnik, Berlin 1922.

[2]) Hdb. Physik VIII (1927), S. 99.

[3]) D. I. KORTEWEG, Ann. Phys. Lpz. 5 (1878), S. 525.

[4]) K. BENNEWITZ, Phys. Z. 25 (1924), S. 423; K. BENNEWITZ u. H. RÖTGER, Phys. Z. 37 (1936), S. 578; W. VOIGT, Ann. Phys. Lpz. 47 (1892), S. 671; R. SCHMIDT, Ing. Arch. 5 (1934), S. 352; F. FÖRSTER, Z. Metallkde. 29 (1937), S. 1909; F. FÖRSTER u. W. KÖSTER, Z. Metallkde. 29 (1937), S. 116.

lässigt werden, für den Dämpfungskoeffizienten

$$\beta_r = \frac{2\pi \cdot c_0 \cdot \varepsilon \cdot N \cdot \eta}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot c_0^2 \cdot N}} \cdot n = 2\pi \cdot \varepsilon \cdot c_r \cdot N \cdot \eta \cdot n = B \cdot n \,. \tag{4}$$

Die abgeleiteten Formeln besagen, 1. daß c_r um so mehr von c_0 abweicht, je größer die Nachgiebigkeit des Rohres ist, und 2. daß die Dämpfung proportional mit der Nachgiebigkeit, der Frequenz und der Verlustzahl η zunimmt. Ein Vergleich mit den gemessenen Resultaten erfolgt bei der Besprechung des experimentellen Teiles dieser Arbeit.

II. Ableitung der Meßverfahren

Die bei den Untersuchungen angewandten Meßverfahren ergeben sich aus leitungstheoretischen Überlegungen. Diese mögen daher hier dem experimentellen Teil vorausgeschickt werden.

Der Schallverlauf in einem Rohr läßt sich allgemein durch folgende Gleichungen für die Amplitude von Schalldruck p und Schallschnelle v darstellen

$$p(x) = A_1 \cdot e^{\gamma x} + A_2 \cdot e^{-\gamma x}$$
$$v(x) = B_1 \cdot e^{\gamma x} + B_2 \cdot e^{-\gamma x} \,.$$

Das Argument x ist die Längenkoordinate in axialer Richtung des Rohres. Der Exponent setzt sich aus einem Dämpfungskoeffizienten β und einer Wellenzahl α in der Form zusammen: $\gamma = \beta + i\,\alpha$. Die Aufgabe besteht nun darin, β und α zu bestimmen.

Ist der Dämpfungsfaktor β so groß, bzw. das Rohr so lang, daß am Rohrende keine Reflexion mehr stattfindet, so wird je einer der beiden Summanden auf der rechten Seite der Gleichungen null. Es bleibt dann also z. B. nur $p(x) = A_2 \cdot e^{-\beta x} \cdot e^{-i\alpha x}$, $v(x) = B_2 \cdot e^{-\beta x} \times e^{-i\alpha x}$ übrig, und man gewinnt ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Dämpfungskonstante β, indem man $p(x)$ bzw. $v(x)$ längs des Rohres mißt. Man arbeitet hier also mit rein fortschreitenden Wellen. Die Angabe der Dämpfung erfolgt am zweckmäßigsten in db/m, wofür die Definition gilt:

$$D = 8{,}68 \cdot 10^2 \cdot \beta\,[\mathrm{db/m}] \,.$$

Dieses Meßprinzip versagt aber, wenn β sehr klein ist, denn dann gelten die Gleichungen in ihrer vollständigen Form, d. h. im Rohr treten stehende Wellen auf. Unter dieser Voraussetzung lassen sich β und α nach einer Resonanzmethode bestimmen. Die Versuchsanordnung hierfür ist in Abb. 1 schematisch wiedergegeben. Das zu untersuchende Rohr wird bei senkrechter Aufstellung am unteren Ende ($x = l$) durch einen Schallsender mit dem mechanischen Widerstand $\mathfrak{Z}_i$ (pro Flächeneinheit) abgeschlossen. Damit ergibt sich eine Randbedingung für das vorliegende Problem: $p(l) = P - v(l)\,\mathfrak{Z}_i$. P stellt die erregende Kraft pro Flächeneinheit dar. Eine zweite Randbedingung folgt aus der Tatsache, daß der Schalldruck an der Wasseroberfläche ($x = 0$) Null zu setzen ist: $p(0) = 0$. Mit Hilfe dieser beiden Randbedingungen und der Beziehung $\frac{p}{v} = \pm z$ (z = akustischer Widerstand des Wassers) lassen sich die Faktoren A_1, A_2, B_1 und B_2 eliminieren, und man erhält

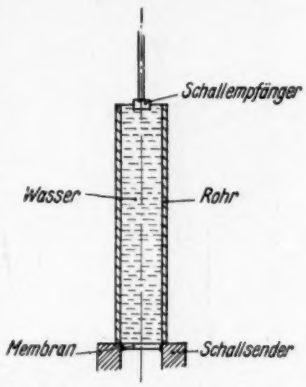

Abb. 1. Prinzip der Meßanordnung zur Resonanzmethode

$$p(x) = \frac{P \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma x}{\left[\frac{\mathfrak{Z}_i}{z}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma l + \mathfrak{Sin}\,\gamma l\right]}, \tag{5}$$

$$v(x) = \frac{P \cdot \mathfrak{Cof}\,\gamma x}{z\left[\frac{\mathfrak{Z}_i}{z}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma l + \mathfrak{Sin}\,\gamma l\right]}. \tag{6}$$

Wird die Schallschnelle am Sender gemessen, bzw. konstant gehalten, also $v(l) = V = \mathrm{const.}$, so ergibt sich für $v(0)$ ein Ausdruck, in dem die Größen des Senders herausfallen

$$v(0) = \frac{V}{\mathfrak{Cof}\,\gamma l}, \tag{7}$$

einen ähnlichen Ausdruck erhält man für den Fall, daß der mechanische Widerstand des Senders vernachlässigt werden kann

$$v(0) = \frac{P}{z\,\mathfrak{Sin}\,\gamma l}. \tag{7a}$$

P entspricht dann einfach dem Schalldruck an der Stelle $x = l$. Nach Einsetzen von $\beta + i\,\alpha$

für γ ergeben sich die absoluten Beträge dieser beiden Gleichungen nach einfacher Umrechnung zu

$$|v(0)| = \frac{V}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \beta l + \cos^2 \alpha l}}, \tag{8}$$

$$|v(0)| = \frac{P}{z_0 \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \beta l + \sin^2 \alpha l}}. \tag{8a}$$

Wegen der geringen Rohrdämpfung kann $z = z_0 = \varrho \cdot c_r$, und die Wellenzahl $\alpha = k = \frac{\omega}{c_r}$ gesetzt werden; darin bedeutet c_r die Wasserschallgeschwindigkeit im Rohr und ϱ die Dichte des Wassers. Die Resonanzstellen lassen sich für Gl. 8 aus der Bestimmungsgleichung $\alpha l = \frac{2\nu+1}{2} \cdot \pi$ und für Gl. 8a aus $\alpha l = \nu \pi$ ermitteln ($\nu = 0; 1; 2 \ldots$). Demnach liegen die Resonanzfrequenzen n_ν bei $n = \frac{2\nu+1}{4} \cdot \frac{c_r}{l}$, bzw. $n = \frac{\nu}{2} \cdot \frac{c_r}{l}$. Betrachtet man die Gl. 8 und 8a nur in einer kleinen Umgebung der Resonanzstellen $n_\nu \pm \Delta n$ ($0 \leq \Delta n \ll n_\nu$) und vernachlässigt Größen höherer Ordnung, so ergeben sich folgende Ausdrücke für $v(0)$

$$|v(0)| = \frac{V}{\sqrt{(\beta_\nu \cdot l)^2 + (\Delta k\, l)^2}}, \tag{9}$$

$$|v(0)| = \frac{P}{z_0 \sqrt{(\beta_\nu \cdot l)^2 + (\Delta k\, l)^2}}. \tag{9a}$$

Diese stellen Resonanzkurven[5]) für die Schnelle am Rohrende dar. Es bedeuten β_ν die Dämpfungskonstante für die betreffende Resonanzfrequenz und $\Delta k = \frac{2\pi \cdot l}{c_r} \cdot \Delta n$. β_ν läßt sich nun in einfacher Weise aus der Halbwertsbreite h $\left(h = n_1 - n_2,\ \frac{h}{2} = \Delta n\right)$, die einer Messung leicht zugänglich ist, bestimmen. h wird definiert durch

$$\left|\frac{v(0)_{\text{res}}}{v(0)_{n_1;\, n_2}}\right|^2 = 2 = \frac{\beta_\nu^2 + \Delta k^2}{\beta_\nu^2} = 1 + \frac{\Delta k^2}{\beta_\nu^2}. \tag{10}$$

Damit erhält man als Beziehung zwischen β_ν und h

$$\beta_\nu = \frac{\pi \cdot h}{c_r}. \tag{11}$$

Die Schallgeschwindigkeit c_r ergibt sich aus der Lage der Resonanzfrequenzen.

[5]) H. Oberst, Akust. Z. 2 (1937), S. 76.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, welchen Einfluß der mechanische Widerstand des Senders auf die Resonanzkurven hat. Zur Vereinfachung der Rechnung wird $\beta = 0$ gesetzt, (d. h. keine Verluste im Rohrmaterial und im Wasser), und der Fall einer Kolbenmembran mit geschwindigkeitsproportionaler Reibungskraft angenommen. Als Ausgangsgleichung dient Gl. 6.

Darin bedeutet $\mathfrak{Z}_i = \frac{\mathfrak{W}}{F} = \frac{R}{F} + i\left(\frac{\omega M}{F} - \frac{S}{\omega F}\right)$; R = Reibungskoeffizient, M = Membranmasse, S = Membransteife. Es wird gesetzt: $\frac{\mathfrak{Z}_i}{z} = r + i\left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right)$. Damit geht Gl. 6 für die Schnelle am Rohrende ($x = 0$) über in

$$v(0) = \frac{P/\varrho\, c_r}{r \cdot \cos k l + i\left[\left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right)\cos k l + \sin k l\right]}.$$

Vorausgesetzt $r \ll 1$ (was für Wasserschall praktisch immer zutreffen wird) ergeben sich die Resonanzstellen des Systems Wassersäule + Sender aus $\left[\left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right)\cos k l + \sin k l\right] = 0$. Man erhält also die Bestimmungsgleichung

$$\frac{s}{\omega_\nu} - \omega_\nu m = \operatorname{tg} \frac{\omega_\nu}{c_r} \cdot l \tag{12}$$

und damit die Resonanzfrequenzen ω_ν, die infolge der Sendermasse und -steife gegenüber

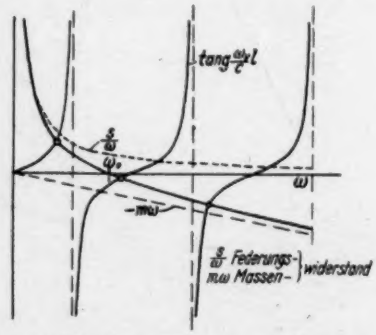

Abb. 2. Graphische Lösung von Gl. 12 zur Bestimmung der Resonanzfrequenzen ω_ν des Systems Wasser + Sender

denen der Wassersäule verschoben sind. Gl. 12 läßt sich graphisch lösen, Abb. 2. Die Nullstellen der Tangenskurven fixieren die Resonanzfrequenzen der unbelasteten Wassersäule. Aus den Zweigen für den Massen- und Federungswiderstand resultiert der Blindwiderstand des Senders, der als Schnittpunkt mit

den Tangenskurven die eigentlichen Resonanzfrequenzen ω_ν liefert.

Um den Einfluß des Senders auf die Halbwertsbreite zu ermitteln, wird $v(0)$ wieder in einer kleinen Umgebung der Resonanzfrequenzen $\omega_\nu + \Delta\omega$ betrachtet. Nach einiger Umrechnung ergibt sich als Zusammenhang zwischen h und r

$$h = \frac{r \cdot \cos k\,l}{\pi \cdot \left[\left(m + \frac{s}{\omega_\nu^2}\right)\cos\frac{\omega_\nu}{c_r}\cdot l - \left(m\,\omega_\nu - \frac{s}{\omega_\nu}\right)\frac{l}{c_r}\sin\frac{\omega_\nu}{c_r}\cdot l + \frac{l}{c_r}\cos\frac{\omega_\nu}{c_r}\cdot l\right]}$$

$\sin\frac{\omega_\nu}{c_r}l$ und $\cos\frac{\omega_\nu}{c_r}l$ lassen sich aus diesem Ausdruck mit Hilfe von Gl. 12 eliminieren, und h geht über in:

$$h = \frac{r}{\pi\left[\left(m + \frac{s}{\omega_\nu^2}\right) + \frac{l}{c_r}\left(\omega_\nu\, m - \frac{s}{\omega_\nu}\right)^2 + \frac{1}{c_r}\right]}. \tag{13}$$

Fällt eine Resonanzfrequenz ω_ν mit der Senderresonanz ω_0 zusammen, dann wird

$$h = \frac{r}{\pi\left(2\,m + \frac{l}{c_r}\right)}\,[1/s] \tag{14}$$

h hat somit hier seinen größten Wert, d. h. also, daß der Verlustwiderstand des Senders sich in der Nähe der Senderresonanz ω_0 auf die Halbwertsbreite am stärksten auswirkt.

B. Die experimentellen Untersuchungen

I. Messungen in fortschreitenden Wellen

Das zuerst abgeleitete Meßverfahren wurde hauptsächlich bei Messungen an Gummischläuchen angewandt. Als Schallquelle diente ein elektrodynamisches System, dessen schallabstrahlende Fläche als Kolbenmembran ausgebildet war. Die Membran — eine Duraluminiumplatte — wurde zwischen zwei Gummiringen gelagert und mit der Schwingspule des dynamischen Systems durch einen kurzen starken Metallstab fest verbunden. Der Betrieb des Senders erfolgte von einem Überlagerungssummer über einen 30 Watt-Verstärker. Der zu untersuchende Gummischlauch wurde mit Bindfäden horizontal aufgehängt und eines seiner Enden auf ein Ansatzstück des Senders gezogen. Am freien Ende befand sich ein nach oben offener Behälter. Die Wasserfüllung erfolgte unter starker Neigung des Rohres, um sämtliche Luft aus dem Rohr zu verdrängen.

Die Untersuchung kann sowohl außen als auch im Innern des Rohres durchgeführt werden. Zur Messung an der Außenwand diente ein Tonabnehmer, der so konstruiert war, daß er im wesentlichen nur die Schwingungskomponenten in radialer Richtung aufnahm. Die Schallstärke im Rohrinnern wurde mit einem elektromagnetischen Telefonsystem aufgenommen, das an ein langes Messingrohr mit elektrischen Zuleitungen angesetzt und in den Schlauch eingeschoben werden konnte. Die Membran bestand aus einem 0,2 mm starken Tombakblech, auf das eine Eisenscheibe genietet war. Ein Schellack- und Paraffinüberzug dichtete das Ganze gegen Wasser ab. Dieses Telefonsystem hat sich bei allen Untersuchungen gut bewährt.

Die Meßanordnung bestand aus einem Widerstandsverstärker mit zwei Eingängen. Vor einem dieser Eingänge und dem Verstärker befand sich ein in db geeichtes Dämpfungsglied mit einer Einstellgenauigkeit von 1 db. Auf diesen Eingang wurde eine konstante Spannung vom Überlagerungssummer geschaltet und auf den anderen die Spannung des Schallempfängers. Mit einem Kopfhörer und z. T. auch über eine Gleichrichteranordnung mit Anzeigeinstrument am Ausgang des Verstärkers wurden die beiden Spannungen durch das Dämpfungsglied auf gleiche Stärke abgeglichen. An Stelle des Verstärkers mit Dämpfungsglied wurde auch ein Röhrenvoltmeter mit logarithmischer Skala benutzt[6]). Damit war es möglich, die Messungen in etwas abgeänderter Weise durchzuführen. Der Schallempfänger wurde an bestimmten Punkten des Schlauches fest eingestellt und nun die Frequenz für jeden dieser Punkte kontinuierlich variiert. Die jeweilige Schallstärke wurde mit einer optischen Registriervorrichtung aufgezeichnet. Die Meßgenauigkeit lag auch hier etwa innerhalb von 1 db.

Bei Verwendung des Tonabnehmers zeigte sich eine ungenügende Reproduzierbarkeit, was wohl im wesentlichen auf die unbestimmten Verhältnisse beim jedesmaligen Aufsetzen des Tonabnehmers zurückzuführen ist. Er wurde daher lediglich zu einer Messung benutzt, die den Zweck hatte, den

[6]) E. Meyer u. L. Keidel, Elektr. Nachr.-Techn. 12 (1935), S. 37.

Unterschied der Dämpfung zwischen einem leeren und einem wassergefüllten Schlauch zu ermitteln.

Untersucht wurden folgende Gummischläuche:

Schlauch I Länge 9,4 m, Innendurchmesser 5 cm, Außendurchmesser 6,4 cm. Der Schlauch war mit 2 Drahtspiralen umwickelt.

Schlauch II hatte die gleiche Beschaffenheit wie I, besaß jedoch keine Drahtumwicklung.

Schlauch III Länge 10,5 m, Innendurchmesser 10 cm, Außendurchmesser 12,5 cm (ohne Drahtumwicklung).

Alle drei Schläuche hatten mehrere Leineneinlagen.

In den Tabellen 1—3 sind die Meßergebnisse an den drei Schläuchen wiedergegeben.

Tabelle 1, Schlauch I

100	150	300	600	750	1000	1250 Hz
1,5	2,5	4,5	7	8	15	17 db/m

Tabelle 2, Schlauch II

200	600	750	1000	1200 Hz
7,5	11	13	18	19 db/m

Tabelle 3, Schlauch III

100	200	300	800	1000	1500 Hz
2,5	3,0	3,5	7	10	14 db/m

Schlauch II lieferte gegenüber I größere Dämpfungen, was auf das Fehlen der Drahtspiralen zurückzuführen ist. Messungen am leeren Schlauch I ergaben für den gesamten Frequenzbereich höhere Dämpfungen. Der Unterschied betrug etwa 5 db.

Bemerkenswert an diesen Ergebnissen ist die relativ hohe Dämpfung bei allen drei Schläuchen. Dies entspricht den Erwartungen, die man sich nach der erweiterten KORTEWEG-Formel wegen des kleinen E-Moduls und der großen Verlustzahl η für Gummi machen kann. Trägt man die aus den Meßresultaten folgenden Dämpfungskoeffizienten β_r als Funktion der Frequenz auf, so erhält man, wie Abb. 3 zeigt, einen etwa linearen Anstieg für β_r. (Ordinate: β_r in Neper/cm). Die nach der Formel geforderte Proportionalität zwischen dem Dämpfungskoeffizienten und der Frequenz findet hier in dem untersuchten Bereich — abgesehen von den tiefen Frequenzen bei Schlauch II und III — ihre Bestätigung. Die Neigung der 3 Geraden wird aus dem Mittelwert des Verhältnisses $\frac{\beta_r}{n} = \text{const.}$ (unter Ausschluß der Abweichungen bei tiefen Frequenzen) bestimmt. Die durch Dreiecke markierten Punkte fixieren nach dem Vorhergesagten die Lage der Geraden.

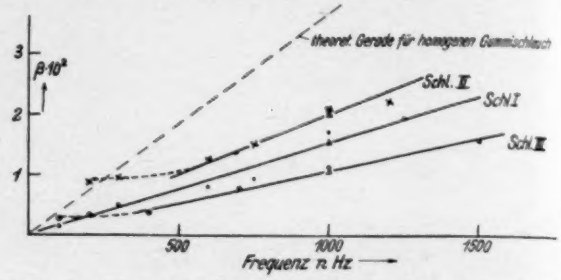

Abb. 3. Dämpfungskoeffizient β_r der drei untersuchten Gummischläuche

Ein quantitativer Vergleich mit der Formel läßt sich wegen des undefinierten E-Moduls (als Folge der Leineneinlagen und der Drahtumwicklung) nicht durchführen. Aus dem gleichen Grunde lassen sich aus den Messungen noch keine Schlüsse auf den Einfluß des Schlauchquerschnittes ziehen, denn, gleiche elastische Eigenschaften vorausgesetzt, müßte die Dämpfung von Schlauch III wegen der dann größeren Nachgiebigkeit über den Werten der beiden anderen Schläuche liegen. Dagegen gibt aber eine qualitative Abschätzung unter der Annahme eines homogenen Gummischlauches mit den geometrischen Abmessungen von Schlauch I, einen dynamischen E-Modul von $E = 10\,[\text{kg/mm}^2]$ (E_{dyn} von Gummi liegt für sehr weichen und sehr harten Gummi zwischen 3—25 $[\text{kg/mm}^2]$ und $\eta = 0{,}1$ größenordnungsmäßig eine gute Übereinstimmung, (gestrichelte Gerade in Abb. 3).

Der Verlauf der Dämpfung längs der Schläuche zeigte häufig eine schwache Wellenform (Abb. 4, am Schlauch III, alle 10 cm gemessen). Dies kann offenbar nur durch stehende Wellen in der Schlauchwandung hervorgerufen werden. Um den Abstand zweier Maxima zu ermitteln, wurde der Schallver-

lauf bei einigen Frequenzen in linearem Maßstab aufgenommen. Der Abstand der Maxima bestimmte sich bei 300 Hz zu 40 cm bzw. bei 600 Hz zu 20 cm. Zur Klärung dieser Erscheinung wurde die Schallgeschwindigkeit in der Schlauchwand selbst ermittelt, und zwar durch eine Phasenmessung mit zwei Tonabnehmern. Diese wurden so geschaltet, daß sich bei einer Bewegung der Nadeln in gleicher Richtung die Spannungen addierten. Ein Tonabnehmer blieb an einer bestimmten Stelle des Schlauches, während der andere jeweils um 5 cm weiter gesetzt wurde. Die Anregung des Schlauches erfolgte

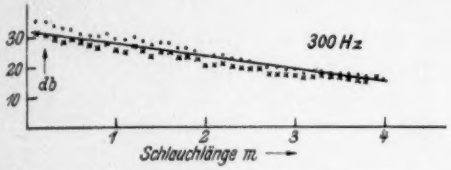

Abb. 4. Verlauf des Schalldruckes längs eines Gummischlauches

an einem Ende mit einem starken elektrodynamischen System (Knochenhörer) einmal zu Longitudinal- das andere Mal zu Transversalschwingungen bei entsprechender Stellung der Tonabnehmer. Die Messung lieferte folgendes Ergebnis:

bei longitudinaler Anregung

300 Hz	$c = 265$ m/sec	$\lambda = 88$ cm
600 Hz	$c = 270$ m/sec	$\lambda = 45$ cm

bei transversaler Anregung

300 Hz	$c = 84$ m/sec	$\lambda = 28$ cm

c = Schallgeschwindigkeit, λ = Wellenlänge.

Ein Versuch, die radiale Schwingungskomponente des Schlauches durch Anregung über eine vorgeschaltete Wasserkammer zu bestimmen, führte zu keinem Resultat. Aus den bei longitudinaler Anregung gefundenen Wellenlängen geht beim Vergleich mit den Abständen der Maxima hervor, daß sich, wie schon vermutet, dem Schallvorgang im Wasser eine stehende Welle im Rohrmaterial überlagert, die für den wellenförmigen Verlauf der Dämpfung verantwortlich ist.

II. Messung von Schallgeschwindigkeiten und kleinen Dämpfungen nach der Resonanzmethode

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 1 (Abschnitt A II) prinzipiell skizziert. Unter Voraussetzung der Kenntnis des Druckes oder der Schnelle am Schallsender wird der Sendereinfluß bei einer Messung der Schnelle am offenen Rohrende, wie die Theorie zeigte, Gl. 7, ausgeschaltet. Andernfalls sind die Bedingungen zu erfassen, die als Folge der dynamischen Belastung der Wassersäule durch den Sender entstehen. Um beide Möglichkeiten auszuwerten, wurde ein im wesentlichen massengehemmter Wasserschallsender so konstruiert, daß die Amplitude seiner Membran kapazitiv gemessen werden konnte, Abb. 5.

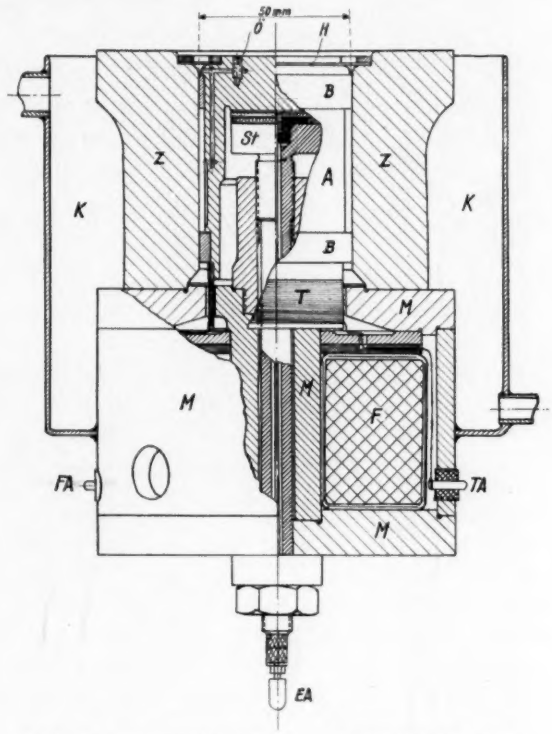

Abb. 5. Elektrodynamischer Wasserschallsender

A = Aluminiumkolben
B = Bronzeringe
T = Tauchspule
St = Stempel mit Gegenelektrode
H = Halterung u. Dichtung
F = Feldspule
M = Magnetgehäuse
TA = Tauchspulenanschluß
FA = Feldanschluß
EA = Elektrodenanschluß
K = Kühlwasserbehälter
Ö = Ölvorrichtung
Z = Stahlzylinder

Der Sender bestand aus einer Kolbenmembran (Duraluminium) mit aufgeschrumpften bronzenen Führungsringen. Der Kolben, am unteren Ende mit einer Schwingspule versehen, war mit Saugpassung in einen geschliffenen schweren Stahlzylinder eingesetzt. Die schallabstrahlende Fläche hatte einen Durchmesser von 5 cm. Um Kippschwingungen der Membran auszuschalten, besaßen die Führungsringe einen großen gegenseitigen Abstand (4 cm). Die Halterung erfolgte durch einen dünnen Ring aus Tombakblech (0,2 mm) am Kopfe des Kolbens. Der Ring wurde zur Abdichtung gegen Wasser mit einer dünnen Gummihaut überzogen. Gegenüber der unteren Stirnfläche des Kolbens befand sich auf einem verstellbaren Stempel die Gegenelektrode. Durch eine Wasserkühlung wurde eine Änderung

des Reibungswiderstandes als Folge einer Temperaturänderung verhindert. Weitere Einzelheiten sind aus der Konstruktionszeichnung ersichtlich. Abb. 6 zeigt die Frequenzkurve der Kolbenamplitude bei Anregung mit konstanter Kraft. Oberhalb der Resonanzstelle (bei etwa 200 Hz) nimmt die Amplitude pro Dekade um 40 db ab, das bedeutet einen Frequenzgang mit $1/\omega^2$. In diesem Bereich spielt also nur der Massenwiderstand eine Rolle.

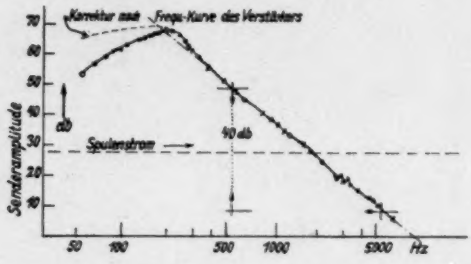

Abb. 6. Frequenzkurve des Wasserschallsenders

Bei Messungen nach der Resonanzmethode, die sich als sehr empfindlich herausgestellt hat, ist zu bedenken, daß durch eine eventuelle Störung des Schallfeldes der Wassersäule beim Eintauchen eines Empfängers Fälschungen der Meßresultate hervorgerufen werden können. Diese Schwierigkeit läßt sich durch eine Schnellemessung an der Wasseroberfläche umgehen. Die Gl. 7 und 8 sind bereits unter diesem Gesichtspunkt abgeleitet worden. Das für solche Messungen erforderliche Schnellemikrophon wurde in einfacher Weise folgendermaßen konstruiert. An eine Tauchspule in einem permanenten Topfmagneten wurde eine gut lackierte Korkscheibe (Durchmesser 42 mm, Dicke 8 mm) geklebt. Die Halterung und Justierung erfolgte sternförmig durch drei Seidenfäden, deren mechanische Spannung reguliert werden konnte. Die in der Spule induzierte E.M.K. ist der Schnelle des Korkes direkt proportional. Ein relativer Vergleich der Frequenzkurven des so konstruierten Schnelleempfängers und eines Kristallmikrophons zeigte besonders bei tiefen Frequenzen eine größere Empfindlichkeit des Schnelleempfängers. Die Empfindlichkeit nahm, wie Versuche ergaben, mit der Eintauchtiefe des Korkes zu.

Um bei sehr kleinen Dämpfungen die Halbwertsbreite h noch genau bestimmen zu können, wird ein besonderes Meßverfahren angewandt. Einem abgegriffenen Teil der Betriebsspannung des Schallsenders wird eine zweite Spannung etwas kleinerer Frequenz überlagert. Die Frequenz der Betriebsspannung wird im Bereiche der Resonanzkurve variiert, während die überlagerte konstant bleibt. Die entstehenden Differenzfrequenzen werden mit einem Relaisfrequenzmesser gemessen[5]). Die absolute Bestimmung der Resonanzfrequenzen erfolgt mit einem AEG-Frequenzzeiger. Z. T. werden sehr kleine Dämpfungen auch durch Nachhallmessungen (mit Dämpfungsschreiber von Nermann) ermittelt.

Vorversuche

Es wurde zunächst eine Reihe von Vorversuchen durchgeführt, die einerseits den Zweck hatten, die Brauchbarkeit der nach Gl. 7 abgeleiteten Meßmethode zu prüfen und andererseits den Einfluß des Senderwiderstandes experimentell zu bestimmen. Gemessen wurde an einem Glasrohr von 1 m Länge, einer Wandstärke von $0{,}8 \pm 0{,}05$ cm und einem inneren Durchmesser von $8 \pm 0{,}1$ cm. Die Füllung bestand aus gekochtem Wasser; dies hat sich, wie später dargelegt wird, als notwendig erwiesen, weil durch einen zu starken Luftgehalt im Wasser die Meßresultate gefälscht werden.

1. Vorversuch:

Der Meßsender wurde mit konstanter Kraft betrieben, die Membranamplitude $v(l)/\omega$ kapazitiv und die Schnelle am Rohrende $v(0)$ mit dem Schnelleempfänger als Funktion der Frequenz gemessen. Die Dämpfung ermittelt sich für diesen Fall nach der aus Gl. 9 durch Einsetzen von $V = v(l)$ leicht abzuleitenden Formel

$$\beta_\nu = \frac{\pi \cdot h}{c_r} \frac{1}{\sqrt{2\left|\frac{v(l)_{n\,1;2}}{v(l)_{\mathrm{res}}}\right|^2 - 1}}. \tag{15}$$

h wird hier aus der Resonanzkurve für die Schnelle am Rohrende gewonnen, $(v(0)_{n\,1;2} = v(0)_{\mathrm{res}}/\sqrt{2})$. In Abb. 7 ist das Meßergebnis dargestellt. Es ist einzusehen, daß die Auswertung der Messungen nach Gl. 15 wegen der Schärfe der Resonanzen nur ungenau werden kann. Die Resonanzfrequenzen für die Schnelle

am Rohrende ergaben sich zu 495; 1020; 1575; 2135 und 2770 Hz.

2. Vorversuch:

Die Schnelle an der Membran wurde konstant gehalten, also $V = v(l) = \text{const}$. Das bedeutet für die dort zu messende Kolbenamplitude einen Abfall mit $1/\omega$, (oder logarithmisch 20 db pro Dekade). Die Messung ist in Abb. 8 wiedergegeben. Auch hier läßt sich eine Auswertung hinsichtlich der Dämpfung schlecht durchführen. Aus der Lage der Resonanzfrequenzen kann aber, da hier der Sendereinfluß ausgeschaltet ist, die Schallgeschwindigkeit in der Wassersäule einwandfrei bestimmt werden. Sie ergibt sich aus den Resonanzfrequenzen bei 885; 1480; 2060 und 3270 Hz zu 1180 m/sec.

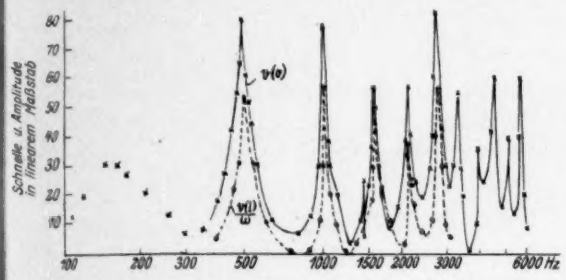

Abb. 7. Senderamplitude und Schnelle an der Wasseroberfläche bei Anregung mit konstanter Kraft

Mit diesem Ergebnis wird nun der Einfluß des mechanischen Senderwiderstandes nachgeprüft. Gemäß Gl. 12 ist eine Verschiebung der Resonanzstellen nach tiefen Frequenzen hin als Folge des überwiegenden Massenwiderstandes zu erwarten. Dies tritt auch, wie Abb. 9 zeigt, tatsächlich ein. Die durch Kreise markierten Punkte sind die Resonanzstellen aus dem ersten Vorversuch, also bei Belastung der Wassersäule durch die Kolbenmembran. Sie

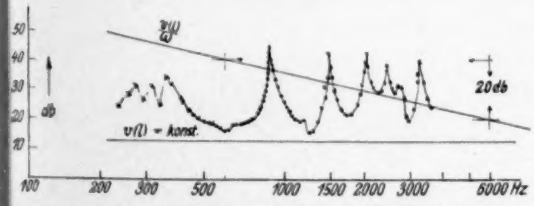

Abb. 8. Schnelle an der Wasseroberfläche bei konstanter Schnelle am Sender

fallen praktisch mit den Frequenzen zusammen, die sich aus den Schnittpunkten der Tangenskurven und der durch die Membranmasse bestimmten Geraden ergeben. (Membranmasse $M = 275$ g). Die Theorie (Abschnitt A II) wird durch dieses Resultat gut bestätigt.

3. Vorversuch:

Danach erhebt sich die Frage, unter welchen experimentellen Voraussetzungen der Einfluß des Schallsenders vernachlässigt werden kann. Zur Klärung dieser Frage wurde ein weiterer Versuch durchgeführt, dabei erfolgte die Anregung der Wassersäule nicht durch den Meßsender, sondern durch ein elektromagnetisches Telefonsystem über eine dünne Eisenmembran (0,5 mm). Die Membran wurde mit Gummikitt an das untere Ende des Rohres geklebt, das Ganze in einen Rahmen gestellt und an diesem mit Schnüren senkrecht aufgehängt. Zur Abdichtung wurde die Klebestelle mit Paraffin vergossen. In geringem Abstand unter der Mitte der Membran befand sich das Telefonsystem, das zur Erhöhung seiner Masse mit einem schweren Bleiklotz fest verbunden wurde, der seinerseits über Stahlfedern und eine Gummiplatte isoliert aufgestellt war. Mit dieser Anordnung wurden folgende Resonanzfrequenzen für die Wassersäule gemessen: 570; 1175; 1775; 2350 und 2915 Hz. Trägt man diese in Abb. 9 ein (durch Kreuze auf der Abszisse markiert), so sieht man, daß sie praktisch mit den Nullstellen der Tangenskurven zusammenfallen, also mit den Stellen, für die der Senderwiderstand null ist. (Dies bezieht sich natürlich nicht auf den Verlustwiderstand des Sen-

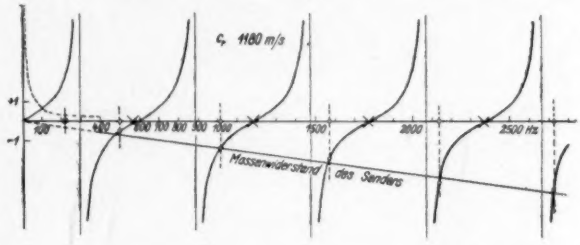

Abb. 9. Gemessene Verschiebung der Resonanzfrequenzen n_ν bei Belastung der Wassersäule durch den Widerstand des elektro-dynamischen Schallsenders (n_ν durch Kreise markiert)

ders, da ja dieser auf die Lage der Resonanzstellen praktisch ohne Einfluß ist.) Eine dünne Membran ist demnach, was das wesentliche Ergebnis dieses Versuches in Verbindung mit den beiden ersten darstellt, für die Wassersäule als schallweicher Abschluß zu werten.

Aus diesem Grunde werden alle weiteren Messungen an senkrecht aufgestellten Rohren mit der zuletzt besprochenen Anordnung durchgeführt. Die Dämpfungsverluste der Membran selbst können auf die Halbwertsbreiten der Resonanzkurven nur einen vernachlässigbaren Einfluß haben, denn einerseits ist der Verlustwiderstand für Eisen sehr klein ($\eta \sim 1 \times 10^{-3}$ für Biegeschwingungen), andererseits beschränkt sich sein Einfluß im wesentlichen auf die Umgebung der Membranresonanz, und schließlich wird gemäß Gl. 14 die Halbwertsbreite der Membranresonanz durch die Masse der Wassersäule über der Membran (~ 5000 g gegenüber Membranmasse ~ 30 g) um Größenordnungen reduziert. (Gl. 14 hat natürlich auch für eine Membran mit verteilter Masse und Steife Gültigkeit, wenn dementsprechend die äquivalenten Größen eingesetzt werden[7]).

Die nach dem Resonanzprinzip mit der zuletzt beschriebenen Anordnung untersuchten Rohre unterschieden sich hinsichtlich ihres Materials und ihrer Wandstärken. Es wurden zwei Glasrohre, ein Blei-, ein Messing- und ein Zinkblechrohr untersucht. In Abb. 10a—f sind die Meßergebnisse zusammengestellt und gleichzeitig die Daten der einzelnen Rohre angegeben. Als Abszisse sind die Frequenzen, als Ordinate die aus den Resonanzkurven ermittelten Halbwertsbreiten h, die dem Dämpfungskoeffizienten β_r direkt proportional sind, aufgetragen. Die Messungen an den beiden Glasrohren und am Bleirohr wurden, um genügend Meßwerte zu erhalten, so durchgeführt, daß die Wassersäule jeweils um einen kleinen Betrag (5 cm) verkürzt wurde.

Der Verlauf der Halbwertsbreiten zeigt bei einigen Frequenzen ausgeprägte Maxima. Nach dem oben Gesagten können diese nicht von Verlusten in der Membran selbst, deren Eigenfrequenz etwa bei 600 Hz lag, herrühren. Vergleicht man die Meßergebnisse in Abb. 10a, b und d, so ist zunächst eine erhöhte Zahl der Maxima am Bleirohr festzustellen. Weiter ergibt sich, daß die Maxima bei allen drei Rohren

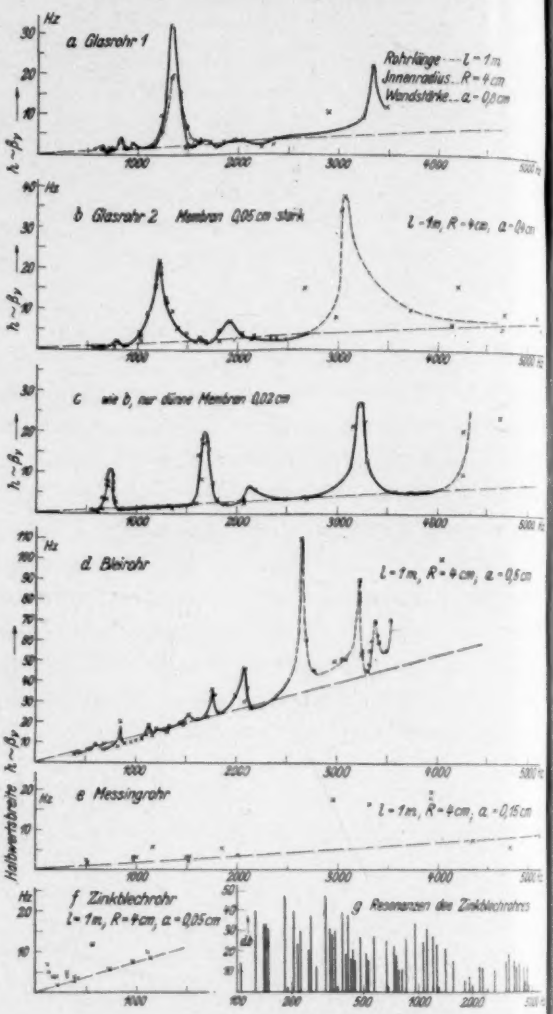

Abb. 10a—f. Gemessene Halbwertsbreiten an verschiedenen Rohren (g Resonanzen des Zinkblechrohres)

verschiedene Frequenzlagen aufweisen, wobei allerdings zwischen Glasrohr 1 und 2 die Unterschiede nicht beträchtlich sind. Nach diesen Feststellungen wäre es naheliegend, die Maxima auf besonders starke Energieabsorptionen der Wand an den Rohrwandresonanzen zurückzuführen. Diese Erklärung ist aber allein nicht ausreichend, denn, wie der Versuch in Abb. 10c am Glasrohr 2 zeigte, tritt bei Verwendung

[7]) Hdb. Exp.-Physik XVII (1934), S. 16.

einer dünneren Membran (0,02 gegenüber 0,05 cm) ein erheblich anderer Verlauf der Halbwertsbreiten ein. Ein weiterer Versuch (am Glasrohr 1 mit der stärkeren Membran) ergab beim Vergießen der Membran mit Paraffin kleinere Halbwertsbreiten (durch Kreise in Abb. 10a markiert). Vermutlich spielt die äußere Reibung zwischen Rohr und Membran, die bei radialen Rohrresonanzen am stärksten in Erscheinung tritt, hier eine Rolle. Demnach beruhen die Maxima wahrscheinlich auf einem Zusammenwirken von Rohrwandresonanzen und äußeren Reibungsverlusten zwischen Membran und Rohr.

Im Ganzen gesehen zeigt die Halbwertsbreite bei allen Rohren einen Anstieg mit der Frequenz, der etwa den eingezeichneten Geraden entspricht. Daß dieser Anstieg nicht von irgendwelchen Reibungsverlusten zwischen Rohr und Membran herrührt, bewies eine Messung an einem Eisenrohr bei vollkommen freier Anregung der Wassersäule. Das Eisenrohr, $l = 1$ m, war an seinen Enden mit kurzen Kniestücken versehen. In horizontaler Aufhängung wurde nun die Wassersäule an einem Wasserspiegel mit einem auf S. 94 beschriebenen elektrodynamischen Schnelleempfänger als Schallsender angeregt. Die dabei gemessenen Halbwertsbreiten sind in Abb. 11 wiedergegeben. Sie steigen in gleicher Weise ungefähr proportional mit der Frequenz an. (Die Messungen mit dieser

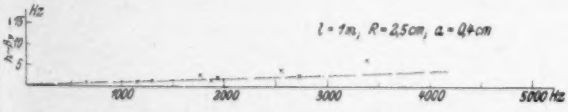

Abb. 11. Halbwertsbreiten bei freier Anregung der Wassersäule, gemessen an einem Eisenrohr

horizontalen Anordnung gestalteten sich schwierig, weil es nur mit Mühe gelang, die Rohrwände luftfrei zu halten.) Der lineare Anstieg der Halbwertsbreiten bleibt bei allen Rohren in dem untersuchten Frequenzbereich (bis etwa 4000 Hz) ungefähr gewahrt. Die Halbwertsbreiten der beiden Glasrohre und des Messingrohres liegen in der gleichen Größenordnung, während die des Bleirohres etwa um den Faktor 10 größer sind. Am Zinkblechrohr (Wandstärke 0,05 cm) konnten wegen der Dichte der Resonanzfrequenzen, Abb. 10g und der damit verbundenen Überschneidung der Resonanzkurven nur einige Halbwertsbreiten gemessen werden. Sie liegen ihrer Größe nach zwischen denen des Messing- und des Bleirohres.

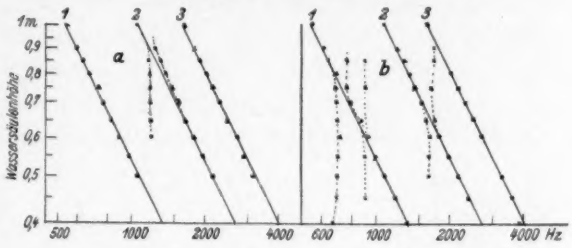

Abb. 12. Resonanzfrequenzen in Abhängigkeit von der Höhe der Wassersäule (bei Glasrohr 2, $c_r = 1080 \frac{m}{s}$; a) Membran 0,05 cm, b) Membran 0,02 cm)

Die Wasserschallgeschwindigkeit c_r bestimmt sich aus der Lage der Resonanzfrequenzen, und zwar, wegen des weichen Abschlusses durch die Membran, nach der Bestimmungsgleichung $c_r = \frac{2\,n\,l}{\nu}$ (wobei $\nu = 1; 2 \ldots$). Bei den Glasrohren und auch beim Messingrohr erwies sich c_r unabhängig von der Frequenz. In Abb. 12 sind die Resonanzfrequenzen am Glasrohr 2 in Abhängigkeit von der Höhe der Wassersäule durch Kreuze eingetragen. Für das vollständig gefüllte Rohr ergab sich c_r zu 1080 m/sec. Unter Zugrundelegung dieser Schallgeschwindigkeit fixieren die eingezeichneten schrägen Geraden die Resonanzfrequenzen bei verschiedenen Wasserhöhen, und zwar jeweils Gerade 1 für den Grundton, Gerade 2 für den ersten Oberton usw. Die gemessenen Werte fallen außer an den Stellen maximaler Absorption mit den Geraden zusammen. Beim Bleirohr scheint die Schallgeschwindigkeit mit wachsender Frequenz schwach abzunehmen. Aus den Resonanzen bei 1 m Wassersäule ermittelt sich c_r bei 385; 754; 1140 und 1480 Hz zu 770; 754; 747 und 740 m/sec. Um in gleicher Weise wie in Abb. 13 eine übersichtliche Darstellung zu gewinnen, wird für die Lage der Geraden eine mittlere Schallgeschwindigkeit von 755 m/sec zugrunde gelegt. Abb. 13 zeigt, daß auch hier in der Umgebung maximaler Absorption eine Verschiebung der Resonanzfrequenzen auftritt.

Die Halbwertsbreiten sind nach Gl. 11 proportional β_v, der Dämpfung des gesamten Systems Wasser + Rohr. Sie umfaßt demnach sowohl Energieverluste infolge der Mediumreibung an der Rohrwand β_w als auch Verluste im Rohrmaterial selbst β_r. (Die an den Rohrenden in die Luft abgestrahlte Schallenergie ist, wie eine Abschätzung ergab, zu vernachlässigen.) Bei kleinen Dämpfungen setzen sich die genannten beiden Anteile additiv zusammen also

$$\beta_v = \beta_w + \beta_r = A\sqrt{n} + B \cdot n\,.$$

Der Faktor A bleibt (wegen $R = \text{const.}$) für alle Rohre konstant und berechnet sich zu $32 \cdot 10^{-8}$ ($\text{sec}^{1/2}$/cm). Die Beurteilung der Versuchsergebnisse hinsichtlich der Dämpfung erfolgt am zweckmäßigsten durch eine Gegenüberstellung der aus den Messungen als Neigung der Geraden, Abb. 10, resultierenden

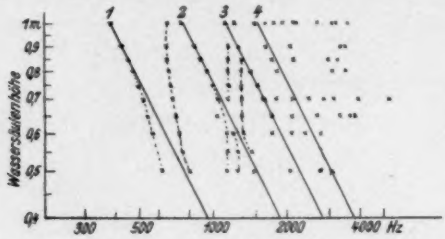

Abb. 13. Wie in Abb. 13, jedoch für Bleirohr ($= 755\ c_r$ m/sec)

Werte B' und der Faktoren B des zweiten Summanden der Gleichung für β_v. Vorerst bleibt aber noch zu untersuchen, in welchem Maße der erste Summand $A \cdot \sqrt{n}$, dessen prozentualer Anteil an der Gesamtdämpfung mit wachsender Frequenz abnimmt, in Erscheinung tritt. Zu diesem Zwecke soll hier für das Glasrohr 1, das von den untersuchten Rohren etwa die kleinste Dämpfung aufweist, eine Abschätzung erfolgen. Der Faktor B berechnet sich für dieses Glasrohr zu $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ (sec/cm), dabei wird $\eta = 2 \cdot 10^{-3}$ und $E = 5{,}7 \cdot 10^{11}$ (Dyn/cm²) gesetzt. Das ergibt bei 400 Hz Gleichheit der beiden Summanden. Bei 1000 bzw. 3000 Hz beträgt der erste Summand nur noch 40 bzw. 27% der Gesamtdämpfung. Für Rohre mit größerer Dämpfung verschiebt sich das Übergewicht in noch höherem Maße auf den zweiten Summanden. Danach und angesichts der Tatsache, daß η eine gewisse Frequenz- und Formabhängigkeit aufweist, hier also nur Mittelwerte angenommen werden können, gewinnt man unter Vernachlässigung des Gliedes $A \cdot \sqrt{n}$ einen ausreichenden Überblick bei einem Vergleich der Größen B' und B.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Meßergebnisse an den Rohren zusammengefaßt und die berechneten Werte angegeben. Die Elastizitätskoeffizienten sind Mittelwerte aus den Angaben der Literatur[8]). In der letzten unteren Spalte ist die Dämpfung in db/m für 1000 Hz aus den gemessenen Halbwertsbreiten berechnet.

Zusammenstellung der Meßresultate, der Rohrdaten und Vergleich mit den berechneten Werten

Rohr	1. Glas 1	2. Glas 2	3. Messing	4. Blei	5. Zinkblech	6. Eisen
Länge (m)	1	1	1	1	1	1
Innendurchmesser (cm)	8	8	8	8	8	5
Wandstärke (cm)	0,8	0,4	0,15	0,5	0,05	0,4
$E\ 10^{11}$ (Dyn/cm²)	5,7	5,7	9,0	1,45	8,0	18,0
$\eta \cdot 10^3$	2	2	1	—	5	1
Nachgiebigkeit $N \cdot 10^{11}$	0,88	1,76	3,0	5,5	10,0	0,35
c_r (m/sec) berechnet	1200	1075	965	770	630	1330
c_r (m/sec) gemessen	1180	1080	980	755	(400)	1300
$B \cdot 10^8$ berechnet	1,6	2,6	1,8	—	19,0	0,35
$B' \cdot 10^8$ gemessen	4,0	4,4	4,75	54,0	59,0	2,4
db/m für 1000 Hz	0,035	0,039	0,041	0,47	0,51	0,021

Beim Eisenrohr nimmt der Koeffizient A den Wert $52 \cdot 10^{-8}$ ($\text{sec}^{1/2}$/cm) an; die Wandreibung wird also hier einen größeren Anteil an der an sich schon sehr kleinen Gesamtdämpfung haben. Man erhält daher ein richtigeres Bild, wenn diese Tatsache beim Vergleich berücksichtigt wird. Aus

[8]) F. Kohlrausch, Prakt. Physik, Leipzig 1935, K. Bennewitz, Anm. 4.

diesem Grunde seien die berechneten und gemessenen Dämpfungskoeffizienten β_ν des Eisenrohres und gleichzeitig auch die des Glasrohres 1 für 1000, 2000 und 4000 Hz angegeben.

Eisenrohr

Für	1000	2000	4000 Hz
β_ν berechnet	$2{,}0\ 10^{-5}$	$3{,}1\ 10^{-5}$	$4{,}7\ 10^{-5}$
β_ν gemessen	$2{,}4\ 10^{-5}$	$4{,}8\ 10^{-5}$	$9{,}6\ 10^{-5}$

Glasrohr 1

β_ν berechnet	$2{,}6\ 10^{-5}$	$4{,}63\ 10^{-5}$	$8{,}41\ 10^{-5}$
β_ν gemessen	$4\ 10^{-5}$	$8\ 10^{-5}$	$16\ 10^{-5}$

Obwohl die Theorie von KORTEWEG weitgehende Einschränkungen enthält (s. S. 88), ergibt die Gegenüberstellung der gemessenen und errechneten Werte in der Tabelle, daß die qualitativen Forderungen der Formeln für die Wasserschallgeschwindigkeit und Dämpfung im Rohr durch die Meßergebnisse bestätigt werden. c_r nimmt mit wachsender Nachgiebigkeit ab. Die gemessenen Dämpfungen zeigen im Sinne der Formel eine Zunahme sowohl bei größerer Nachgiebigkeit als auch bei größeren Werten für η und steigen proportional mit der Frequenz an. Quantitativ ist eine gute Übereinstimmung bei den gemessenen Schallgeschwindigkeiten, die ungefähr um 2% von den berechneten abweichen, festzustellen. Ein quantitativer Vergleich der Koeffizienten B und B' zeigt Gleichheit in der Größenordnung, zahlenmäßig unterscheiden sich B und B' etwa um den Faktor 2—3. Die Übereinstimmung wird aber auch hier noch besser, wenn man bei der Beurteilung der Dämpfung, besonders bei Rohren mit sehr kleinen Dämpfungen, die Mediumreibung an der Rohrwand einbezieht.

Die Verlustzahl η für Blei errechnet sich aus den Messungen bei Berücksichtigung des Faktors 3 zu $\eta \sim 6 \cdot 10^{-3}$.

Im Ganzen gesehen liefern diese Ergebnisse somit die Möglichkeit, Dämpfung und Geschwindigkeit für Wasserschall in elastischen Rohren (zum mindesten größenordnungsmäßig) abzuschätzen und vorauszubestimmen.

III. Messung des Druckverlaufs in stehenden Wellen

An den Glasrohren wurden Messungen des Schallverlaufs im Wasser längs der Rohre durchgeführt. Als Schallempfänger diente das bereits beschriebene elektromagnetische Telefonsystem; daneben wurden zu Vergleichszwecken ein Kristallempfänger und ein Kohlemikrophon, das aus einem kurzen Gummiröhrchen mit Kohlepulverfüllung und aus zwei gegen Wasser isolierten Kohleelektroden bestand, verwendet.

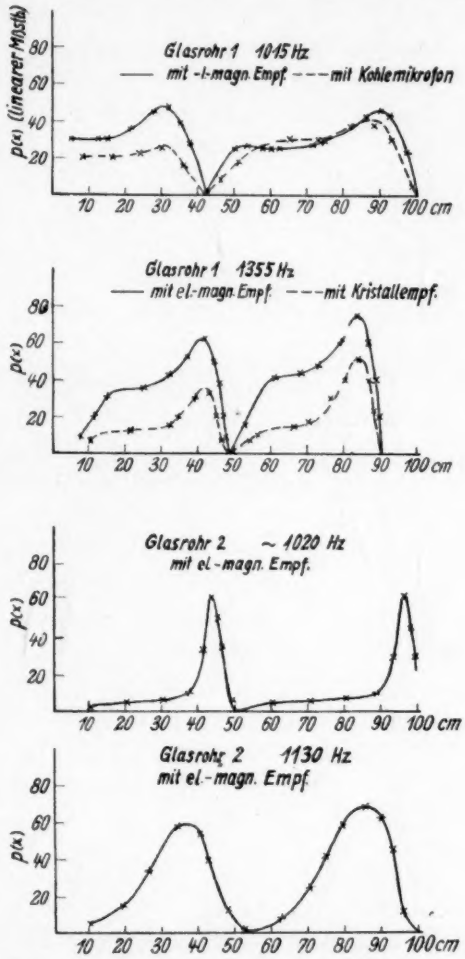

Abb. 14. Anomaler Verlauf des Schalldruckes längs der Glasrohre

Die drei Mikrophone wurden für den in Frage kommenden Frequenzbereich als Druckempfänger identifiziert. Nach der Theorie ist bei stehenden Wellen für $p(x)$ ein sinusförmiger Verlauf zu erwarten. Es zeigte sich aber, daß bei einigen Frequenzen starke Abweichungen auftraten, in besonderem Maße am dünnen Glasrohr. In Abb. 14 sind Messungen, die einen anomalen Druckverlauf zeigten, wiedergegeben. Die Frequenzen, bei denen diese Erscheinung

beobachtet wurde, fallen ungefähr in die Gebiete maximaler Absorption (vgl. Abb. 10a und b). Die gestrichelten Kurven (Glasrohr 1) besagen, daß der gemessene Druckverlauf von der Art des Schallempfängers weitgehend unabhängig ist. Beim Eintauchen des Mikrophons war eine Verschiebung der Resonanzfrequenzen von einigen Hz zu beobachten. (Die Messung am Glasrohr 1 wurde mit dem bei den Gummischlauchuntersuchungen benutzten, die Messung am Glasrohr 2 mit dem in Abb. 5 dargestellten Schallsender durchgeführt). Der zeitliche Druckverlauf war für alle Stellen des Rohres rein sinusförmig, was mit Hilfe eines Kathodenstrahloszillographen festgestellt wurde. Eine Messung an anderer Stelle, s. Abb. 16c, an einem stärkeren Glasrohr (Wandstärke 1,3 cm) zeigte durchweg normal ausgeprägte stehende Wellen für den Schalldruck. Es handelt sich bei den hier beobachteten Erscheinungen wegen der gleichzeitigen Existenz zweier Schallgeschwindigkeiten, der im Rohrmaterial und der im Wasser, vermutlich um eine Superposition zweier Wellen gleicher Frequenz, aber verschiedener Wellenlänge. Als Wirkung dieser beiden Wellen resultiert, besonders in der Umgebung von Rohrwandresonanzen, die starke Veränderung des Druckverlaufes [9]).

IV. Der Einfluß des Luftgehaltes im Wasser auf die Schallausbreitung

An verschiedenen Stellen der Arbeit wurde bereits darauf hingewiesen, daß der Luftgehalt des Wassers den Schallvorgung weitgehend beeinflussen kann. Es waren daher die Bedingungen zu erfassen, unter denen eine Verfälschung der Meßresultate als Folge des Luftgehaltes ausgeschlossen ist. Das Meßverfahren nach der Resonanzmethode ist wegen seiner großen Empfindlichkeit am besten zu derartigen Untersuchungen geeignet. Die Messungen selbst wurden, da es sich hierbei lediglich um Vergleiche handelt, mit dem bei den Gummischlauchuntersuchungen benutzten Sender und dem elektromagnetischen Schallempfänger in der Weise durchgeführt, daß bei verschiedenartiger Wasserfüllung eines Glasrohres der Schalldruck als Funktion der Frequenz in 5 cm Abstand von der Sendermembran aufgenommen wurde. Das Glasrohr hatte eine Länge von 70 cm, eine Wandstärke von 1,3 cm und einen Innendurchmesser von 8 cm. Es wurde

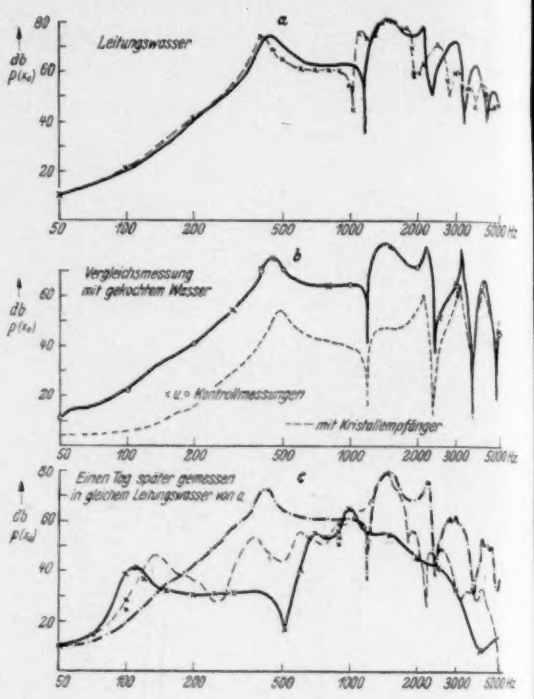

Abb. 15. Der Einfluß des Gasgehaltes im Wasser auf die Schallausbreitung

jeweils bis zu einer Höhe von 60 cm gefüllt. Das Untersuchungsergebnis war folgendes: Bei Verwendung von gekochtem Wasser, Abb. 15b, ließ sich die Frequenzkurve des Schalldruckes, die an den Stellen der Resonanzfrequenzen von Wassersäule + Sender scharfe Minima aufwies, mit großer Genauigkeit reproduzieren. Im Leitungswasser dagegen lagen die Verhältnisse wesentlich anders. Zwar lieferte eine Messung gleich nach dem Einfüllen eine im Verlauf ähnliche Frequenzkurve für den Schalldruck, doch war hier bereits eine Verschiebung der an sich schon nicht mehr so stark ausgeprägten Minima nach tieferen Frequenzen hin zu beobachten, Abb. 15a. Die gestrichelte Kurve — sie wurde anschließend an

[9]) L. J. Sivian, J. Acoust. Soc. Am. 9 (1937), S. 135.

die erste Messung aufgenommen — zeigt diese Tendenz in noch höherem Maße. Während der Messung hatten sich bereits kleine Luftblasen an der Glaswand abgesetzt. Am folgenden Tage wurde die Messung mit derselben Wasserfüllung wiederholt. Inzwischen war die Zahl der Luftblasen an der Glaswand erheblich gewachsen. Abb. 15c zeigt das Meßergebnis. Von ausgesprochenen Minima kann hier keine Rede mehr sein. Die Kurven laufen durcheinander und lassen sich in keiner Weise mehr reproduzieren (stark ausgezogene und gestrichelte Kurve). Nach Entfernen der Luftblasen stellte sich ein Verlauf ein (strichpunktierte Kurve), welcher der Messung in gekochtem Wasser sehr nahe kommt. Um die Zahl der Gasbläschen zu erhöhen, wurden die gleichen Versuche auch in Selterswasser durchgeführt, Abb. 16a und b. Sie zeigen dieselben Erscheinungen in noch krasserer Form. In Abb. 16a läßt sich der Druckverlauf nur noch innerhalb gewisser Grenzen fixieren. In Abb. 16c und d ist eine Messung des Schalldruckes längs des Glasrohres einmal in gekochtem Wasser, das andere Mal in Selterswasser dargestellt. Wie man sieht, wird die Bildung stehender Wellen im Selterswasser durch die Gasbläschen praktisch vollkommen verhindert.

Aus diesen Experimenten geht hervor, daß bei Wasserschalluntersuchungen möglichst gasfreies, also etwa gekochtes Wasser verwendet werden muß. Der Einfluß des Gasgehaltes äußert sich sowohl in einer Verringerung der Schallgeschwindigkeit (Verschiebung der Minima nach tiefen Frequenzen) als auch im Auftreten einer Dämpfung, die deutlich bei höheren Frequenzen ansteigt. Diese Wirkung ist um so größer, je mehr sich das Gas in Form von Blasen abgesetzt hat und je größer der Blasendurchmesser selbst wird. Dies ist erklärlich, denn die einzelnen Blasen stellen für sich schwingungsfähige Gebilde mit Dämpfung dar, deren Eigenfrequenz sich aus dem Gasvolumen und der mitschwingenden Flüssigkeitsmasse bestimmt[10]). Je größer nun der Durchmesser der Blasen wird, um so mehr rücken ihre Resonanzfrequenzen in den hier betrachteten Frequenzbereich. Die gefundene Verringerung der Schallgeschwindigkeit steht im Widerspruch mit Angaben der Literatur, wonach die Schallgeschwindigkeit mit der Menge des absorbierten Gases wachsen soll[11]).

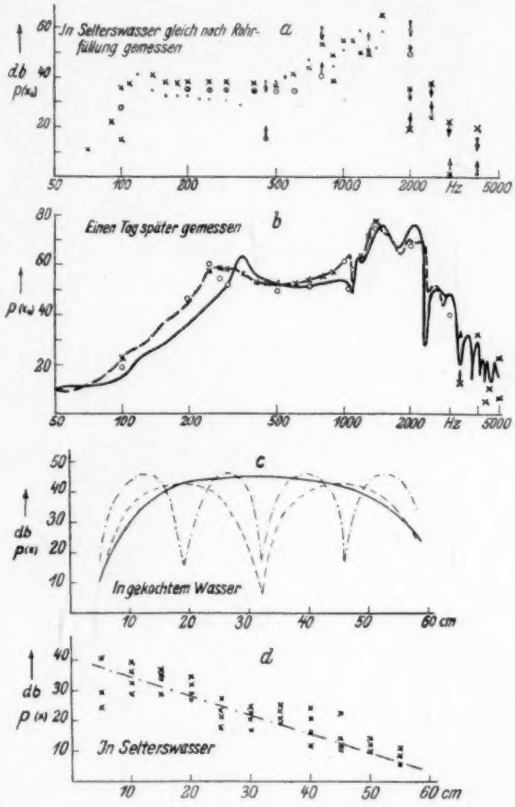

Abb. 16. a und b wie in Abb. 15, jedoch in Selterswasser, c und d Verlauf des Schalldruckes längs des Rohres bei 1200, 2400, 4800 Hz und bei 2260 Hz

Der Schwingungszustand der Wassersäule in einem Glasrohr läßt sich mit Hilfe von Luftblasen durch ein einfaches Experiment[12]) sehr anschaulich demonstrieren. Einige Luftblasen an der Glaswand oder im Inneren der Wassersäule werden bei stroboskopischer Beleuchtung durch ein Mikroskop beobachtet. Wird die Wassersäule zu intensiven Schallschwingungen angeregt, so vollführen die Luftblasen deutlich

[10]) E. Meyer und K. Tamm, Akust. Z. 4 (1939), S. 145.

[11]) F. Aigner, Unterwasserschalltechn. S. 46 (s. Anm. 1).

[12]) Dieses Experiment wurde auf Anregung von Herrn Dr. A. Schoch durchgeführt.

sichtbare Bewegungen, und zwar in einem Druckbauch Pulsationen, in einem Geschwindigkeitsbauch Translationen.

Zusammenfassung

Beim Wasserschall in Rohren hängt die Dämpfung und Schallgeschwindigkeit von den physikalischen und geometrischen Eigenschaften der Rohre ab. Eine von KORTEWEG aufgestellte Formel für die Wasserschallgeschwindigkeit in elastischen Rohren wird auf die Dämpfung als Folge der Energieverluste im Rohrmaterial erweitert. Es werden an Gummischläuchen in fortschreitenden Wellen im Bereiche der Hörfrequenzen bis etwa 2000 Hz die Dämpfungen gemessen, die, der Formel entsprechend, bis auf geringe Abweichungen einen proportionalen Anstieg mit der Frequenz aufweisen. Die Dämpfung der Gummischläuche liegt bei 1000 Hz etwa zwischen 10 und 20 db/m. Bei kleinen Rohrdämpfungen werden die Messungen nach dem Resonanzprinzip bei senkrechter Aufhängung der Rohre durchgeführt, wobei sich die Wasserschallgeschwindigkeit aus der Lage der Resonanzfrequenzen und die Dämpfung aus den Halbwertsbreiten der Resonanzkurven bestimmt. Der mechanische Widerstand des Schallsenders geht — wie eine theoretische Überlegung und auch das Experiment zeigt — in die Messung ein. Eine dünne Eisenmembran ist jedoch, wie Vergleichsmessungen mit einem besonders konstruierten Schallsender ergaben, für die Wassersäule als schallweicher Abschluß zu werten. Die Aufnahme der Resonanzkurven erfolgt, um den Schallverlauf im Wasser nicht zu stören, am oberen Rohrende durch Schnellemessungen mit einem Empfänger, der im wesentlichen aus einer auf eine Korkscheibe geklebten Schwingspule in einem Topfmagneten besteht. Es werden zwei Glasrohre verschiedener Wandstärke, ein Messing-, ein Blei- und ein Zinkblechrohr untersucht. Alle Rohre haben gleiche Längen und gleichen Innendurchmesser. Die gemessenen Halbwertsbreiten zeigen bei einigen Frequenzen ausgeprägte Absorptionsmaxima. Ihr Auftreten wird auf ein Zusammenwirken von Rohrwandresonanzen und äußeren Reibungsverlusten zwischen Rohr und Membran zurückgeführt. Im übrigen zeigen die Halbwertsbreiten und damit auch die Dämpfungen einen frequenzproportionalen, also einen etwa durch Geraden darstellbaren Anstieg. Dieser Anstieg wird ebenfalls an einem Eisenrohr bei freier Anregung der Wassersäule gefunden und damit bestätigt. Bei einem Vergleich der Meßergebnisse mit der Theorie muß, besonders bei Rohren mit sehr kleinen Dämpfungen, die Mediumreibung an der Rohrwand berücksichtigt werden.

Es ergibt sich, daß die gemessenen und berechneten Dämpfungen in der Größenordnung übereinstimmen. Qualitativ erfüllen die gemessenen Werte die Forderungen der auf die Dämpfung erweiterten Formel von KORTEWEG, nämlich Anstieg mit der Frequenz, mit größerer Nachgiebigkeit des Rohres und mit größerer Verlustzahl η des Rohrwandmaterials. Die gemessenen Schallgeschwindigkeiten stimmen gut mit den berechneten Werten überein. Die Abweichung beträgt hier nur etwa 2%. Bei Messungen des Schalldruckes längs der Glasrohre in stehenden Wellen wird bei einigen Frequenzen ein anomaler Verlauf festgestellt. Dies beruht offenbar auf einer Superposition zweier Wellen (Welle in der Rohrwand und Welle im Wasser) gleicher Frequenz, aber verschiedener Wellenlänge. Alle Messungen werden in gekochtem Wasser durchgeführt, weil, wie besondere Untersuchungen zeigen, der Luftgehalt des Wassers den Schallvorgang erheblich beeinflussen kann.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Professor Dr. E. MEYER für sein Interesse an meiner Arbeit, seine wertvollen Anregungen und seine großzügige Unterstützung herzlichst danken.

(Eingegangen am 28. September 1939.)

Zur thermischen Dämpfung in Mikrophonluftspalten

Von H. Pfriem VDI

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V.
Inst. f. mot. Arbeitsverfahren und Thermodynamik

(Mit 4 Textabbildungen)

I. Einleitung

Mikrophonluftspalte stellen zusammen mit entsprechenden Membranen schwingungsfähige Systeme dar, die in Verbindung mit elektrischen Einrichtungen zu Schallmeßzwecken oder zur Schall-Aufnahme (Mikrophon) bzw. -Wiedergabe (Telephon, Lautsprecher) dienen. Diese erfordern in allen Fällen eine zweckmäßige Dämpfung, damit möglichst kleine Verzerrungen entstehen[1]). Bei Kondensatormikrophonen wird beispielsweise die Änderung der Kapazität einer — unter dem Einfluß von auftretenden Schallwellen — schwingenden Membran gegenüber einer feststehenden Platte verwendet. Zwischen Membran und Platte befindet sich ein abgeschlossenes Luftpolster, das gleichzeitig das Dielektrikum des Kondensators und einen wesentlichen Anteil der elastischen Konstante des schwingenden Systems darstellt. Die Dämpfung dieses Systems setzt sich dabei in der Hauptsache aus zwei Anteilen zusammen, nämlich der Strömungsdämpfung und der thermischen Dämpfung im Spalt.

Die Strömungsdämpfung ist die Folge der durch Verdrängungswirkungen der Membran auftretenden Strömungsverluste im Luftpolster.

Die thermische Dämpfung ist bedingt durch die mit den periodischen Druckschwankungen der Luft eintretenden Temperaturänderungen in Verbindung mit der endlichen Wärmeleitfähigkeit[2]) aller den Luftspalt umgebenden Baustoffe.

Nachstehend werden nur die thermische Dämpfung und die damit zusammenhängende Änderung der elastischen Eigenschaften eines ebenen Luftspaltes, die versuchsmäßig meist nicht von seiner Gesamtdämpfung bzw. Gesamtelastizität getrennt werden können, rechnungsmäßig verfolgt. Dabei wird zur Erleichterung der Entwicklungen der nachstehend angedeutete, zunächst vielleicht umständlich erscheinende Weg eingeschlagen.

Es wird zunächst angenommen, daß im Luftspalt Druckschwankungen bestehen. Dann wird der Zusammenhang zwischen diesen Druckschwingungen und der dadurch auftretenden Verdichtungswärme im Luftpolster ganz allgemein entwickelt. Mit der Voraussetzung, daß im Luftpolster keine turbulenten Bewegungen der Gasteilchen bestehen — was bei genügend kleinen Geschwindigkeiten der Membran praktisch der Fall ist —, können dann für die hier nur interessierenden, rein periodischen Druckschwingungen, die Temperaturfelder im Luftpolster und in seinen Begrenzungswänden berechnet werden. Hieraus ergeben sich weiter die dem Luftpolster durch die Begrenzungswände zu- bzw. abgeführten Wärmemengen nach Größe und Phasenlage. Damit kann dann die zur Aufrechterhaltung der Druckschwankungen im Luftpolster notwendige Geschwindigkeit der Membran nach Größe und Phase berechnet werden. Die Massenwirkungen der Luft im Spalt sollen dabei vernachlässigt werden, da sie auch verhältnismäßig sehr gering sind und durch einen entsprechenden Zuschlag

[1]) Vgl. z. B. W. Ernsthausen, Über die Verzerrung des Niederfrequenz-Kondensatormikrophons. Arch. Elektrotechn. **31** (1937), S. 487.

[2]) Die zeitliche Abhängigkeit der Energieverteilung auf die verschiedenen Freiheitsgrade der Gasmoleküle von der Schnelligkeit der Verdichtung sowie die Wärmeübertragung durch Strahlung sollen in der vorliegenden Betrachtung nicht berücksichtigt werden.

zur Membranmasse leichter erfaßt werden können. Ein Vergleich der so gefundenen Membranschwingungen mit den Zwangsschwingungen eines gedämpften, elastischen aber masselosen Systems, liefert schließlich die Abhängigkeit der Schwingungseigenschaften des Luftpolsters[3]) von der Spaltweite, dem Druck im Spalt, der Frequenz der Schwingungen und von der Temperaturleitfähigkeit des Gases im Spalt.

II. Allgemeine Rechnungsgrundlagen

Für eine die Gewichtseinheit des Gases einschließende Elementarschicht von verschwindender Dicke längs einer Isothermen innerhalb

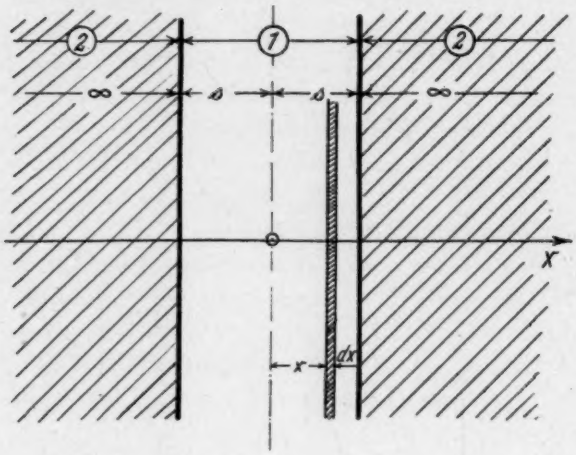

Abb. 1. Idealisierter Luftspalt (mit Elementar-Schicht) in einem Mikrophon

des Luftpolsters (s. Abb. 1) gilt der erste Hauptsatz der Wärmelehre[4]) beispielsweise in der nachstehenden Form:

$$dQ = di - A\,v\,dP\,.$$

Dabei ist:

Q die zugeführte Wärmemenge je Gewichtseinheit (kcal/kg);
i der Wärmeinhalt des Gases (Enthalpie) (kcal/kg);
v das spezifische Volumen des Gases (m^3 kg);
P der absolute Gasdruck (kg/m²);
A das mechanische Wärmeäquivalent (kcal/mkg).

Die einer Elementarschicht zugeführte Wärmemenge ist nun bei praktisch ruhender Luft durch die örtliche Änderung des (nur durch Wärmeleitung bedingten) Wärmestromes gegeben. Bei einem Luftpolster zwischen einer ebenen, genügend großen Kolbenmembran und einer parallel hierzu feststehenden, ebenen Platte kann man bei kleiner Spaltweite unter Vernachlässigung der Randwirkungen annehmen, daß das Temperaturfeld eben ist. Daher ist praktisch:

$$dQ = -v\frac{\partial q}{\partial x}\cdot d\tau = v\,\lambda\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}d\tau\,.$$

Darin bedeutet:

x die Ortskoordinate (m);
τ die Zeit (h);
q den Wärmestrom (kcal/m²h);
ϑ die Temperatur des Gases (°C);
λ die Wärmeleitfähigkeit des Gases (kcal/mh°C).

Die Änderung des Wärmeinhaltes der Gasschicht ist dabei:

$$di = c_p\,d\vartheta$$

wenn c_p die mittlere spezifische Wärme des Gases bei unveränderlichem Druck ist (kcal/kg °C).

Damit läßt sich der erste Hauptsatz der Wärmelehre für die Gewichtseinheit der Elementarschicht auch schreiben:

$$v\,\lambda\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}d\tau = c_p\,d\vartheta - A\,v\,dP\,.$$

Nachdem innerhalb des Luftpolsters der Druck an allen Stellen als gleich angenommen werden darf, findet man also hieraus bei endlicher Geschwindigkeit der Elementarschicht in Richtung senkrecht zur Membranebene:

$$(1)\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} + w\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = a\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{A\,v}{c_p}\frac{dP}{d\tau}\,.$$

Hierin ist:

w die Geschwindigkeit der Gasteilchen senkrecht zur Membranebene (m/h);
$a = \frac{\lambda\,v}{c_p}$ die Temperaturleitfähigkeit des Gases (m²/h).

Das Temperaturfeld im Luftpolster ist durch die vorstehende partielle Differentialgleichung

[3]) Trotzdem die Entwicklungen unabhängig von der Art des Gases im Spalt durchgeführt werden, soll doch nachstehend mit Rücksicht auf eine einfache Ausdrucksweise stets vom „Luftspalt" bzw. „Luftpolster" gesprochen werden.

[4]) Vgl. z. B. E. Schmidt, Einführung in die techn. Thermodynamik, Springer (1936), S. 27.

zweiter Ordnung bestimmt. Man erkennt, daß Gl. (1) die Differentialgleichung der Wärmeleitung mit Konvektionsstrom $\left(w\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)$ und räumlich verteilten, zeitveränderlichen Wärmequellen $\left(\frac{A\,v}{c_p}\frac{dP}{d\tau}\right)$ ist. Der konvektive Wärmestrom ist dabei physikalisch durch die mit den Druckschwankungen verbundenen Volumenänderungen bedingt, während die Ursache der Wärmequellen in der Verdichtungswärme zu suchen ist. Diese kann für die vorliegende Aufgabe trotz der Wärmeableitung nach außen — von kleinen Größen höherer Ordnung abgesehen — als unabhängig vom Ort angesehen werden, da praktisch kein örtliches Druckgefälle besteht und auch die Gaseigenschaften für die in Frage kommenden kleinen Druckänderungen praktisch unveränderlich sind.

III. Näherungsrechnung für harmonisch veränderliche Temperaturfelder

Für die zeitliche Druckänderung im Luftpolster soll eine rein harmonische Abhängigkeit angenommen werden; es soll also sein[5]):

$$P - P_0 = \Delta P\, e^{j\omega\tau}. \tag{2}$$

Dabei ist:

P_0 der unveränderliche, mittlere absolute Druck im Luftpolster (kg/m²);

ΔP die Schwingungsweite der Druckschwingungen im Luftpolster (kg/m²);

ω die Kreisfrequenz der Druckschwingung (1/h);

$j = \sqrt{-1}$.

Die allgemeine Differentialgleichung der Wärmeleitung Gl. (1) für Temperaturfelder im periodisch verdichteten Luftpolster lautet nun mit Gl. (2) bei Vernachlässigung der für kleine Ausschläge der Membran praktisch verschwindend kleinen Strömungsgeschwindigkeit w wie folgt[6]):

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = a_1\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{j\,\omega\,A\,\Delta P}{c_{p_1}\gamma_1}e^{j\omega\tau}. \tag{3}$$

$\gamma_1 = \frac{1}{v_1}$ ist das spezifische Gewicht des Gases im Spalt (kg/m³). Der Zeiger 1 weist allgemein auf Eigenschaften des Gases im Spalt hin und ϑ soll dabei künftig nur noch die periodische Übertemperatur darstellen.

Für die folgende thermische Rechnung soll nun das Kondensatormikrophon unter Vernachlässigung der Randwirkungen durch einen ebenen Luftspalt in einem allseitig ausgedehnten, homogenen Körper ersetzt werden (vgl. Abb. 1). Dies ist im Hinblick auf die große Wärmekapazität der Membran bzw. der festen Rückwand des Mikrophons im Vergleich zu der des Luftpolsters und wegen der kleinen Spaltweite mit guter Näherung zulässig. Bei Vernachlässigung der kleinen Änderungen der Spaltweite — was für das Temperaturfeld praktisch ohne Bedeutung ist — findet man dann als Lösung für das periodische Temperaturfeld im Luftpolster die Beziehung[7]):

$$\vartheta = \frac{A\,\Delta P\,e^{j\omega\tau}}{c_{p_1}\gamma_1}\left\{1 - \frac{1-\varrho_{12}}{2}\frac{e^{\psi_1 x} + e^{-\psi_1 x}}{e^{\psi_1 s_1} - \varrho_{12}\,e^{-\psi_1 s_1}}\right\}, \quad |x| \le s_1 \tag{4}$$

wobei der Ursprung der Ortskoordinate entsprechend Abb. 1 in die Mittelebene des Luftpolsters gelegt und noch folgende Größen eingeführt wurden:

ϱ_{12} die Reflexionszahl der Temperatur-Wärme-Wellen;

s_1 die mittlere, halbe Spaltweite (m) und:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{j\,\omega}{a_1}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega}{2\,a_1}} = (1+j)\,\varphi_1. \tag{5}$$

Das Temperaturfeld in den ebenen Begrenzungswänden des Luftpolsters ist infolge der fehlenden Strömungen und Wärmequellen[8]) durch die hier-

[5]) Von den nachstehenden komplexen, mathematischen Gleichungen bildet jeweils der Real- oder Imaginärteil für sich allein eine physikalisch vorstellbare Lösung.

Die folgenden Entwicklungen werden zur besseren Übersicht nur für einfache, harmonische Schwingungen angegeben. Alle beliebig periodischen Schwingungen können dann leicht in Form von Fourier-Reihen durch Harmonische dargestellt werden.

[6]) Eine genauere Berechnung mit Berücksichtigung einer endlichen Geschwindigkeit w als Folge der Verdichtung ist im Hinblick auf die Wärmeübertragung in Kolbenmaschinen in Angriff genommen.

[7]) Stationäre und nichtstationäre Wärmeanteile (z. B. Anfahrvorgänge) interessieren in diesem Zusammenhang nicht.

Die Grundlagen für die Ableitung dieser Beziehung ergeben sich aus einer früheren Arbeit des Verfassers: „Beitrag zur Theorie der Wärmeleitung bei periodischen (quasistationären) Temperaturfeldern". Ing.-Arch. 6 (1935), S. 97.

[8]) Die Verdichtung des Werkstoffes der Wand und die damit verbundenen Bewegungen und Verdichtungswärmen sind verschwindend klein gegenüber jenen im Gasraum und können daher ohne weiteres vernachlässigt werden.

durch vereinfachte Differentialgleichung der Wärmeleitung bestimmt:

$$(6) \qquad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

Hierin ist

t die periodische Übertemperatur in den Begrenzungswänden des Luftpolsters (° C).

Der Zeiger 2 ist den thermischen Eigenschaften der Begrenzungswände vorbehalten.

Die Lösung hierfür lautet[7]):

$$(7) \quad t = \frac{A\,\Delta P\, e^{j\omega\tau}}{c_{p_1}\gamma_1} \frac{1+\varrho_{12}}{2} \frac{e^{\psi_1 s_1} - e^{-\psi_1 s_1}}{e^{\psi_1 s_1} - \varrho_{12} e^{-\psi_1 s_1}} e^{\mp\psi_2(x\mp s_1)}. \qquad |x| \geq s_1.$$

Das obere Vorzeichen im Exponenten gilt dabei jeweils für $x \geq s_1$, das untere für $x \leq -s_1$.

Man überzeugt sich leicht, daß die Übergangsbedingungen an den Grenzflächen $x = \pm s_1$ der Stoffe 1 und 2 — also $\vartheta_{\pm s_1} = t_{\pm s_1}$ und

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{\pm s_1} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{\pm s_1}$$

— für die Gl. (4) und (7) tatsächlich erfüllt sind und diese daher wirklich die Lösungen für das Temperaturfeld der vorliegenden Aufgabe darstellen, wenn man die Reflexionszahl in nachstehender Weise definiert:

$$\varrho_{12} = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}.$$

Dabei ist $b = \sqrt{\lambda c \gamma}$ die Wärmebelastungsfähigkeit des betreffenden Stoffes (kcal/m² h$^{1/2}$°C).

Nach Gl. (4) ergibt sich der Wärmestrom im Luftpolster an einer beliebigen Stelle x zu:

$$q_x = -\lambda_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = a_1 \psi_1 A\, \Delta P\, e^{j\omega\tau} \frac{1-\varrho_{12}}{2} \frac{e^{\psi_1 x} - e^{-\psi_1 x}}{e^{\psi_1 s_1} - \varrho_{12} e^{-\psi_1 s_1}}.$$

Der Wärmestrom an den Grenzflächen $x = \pm s_1$ wird damit:

$$(8) \quad q_{\pm s_1} = \pm a_1 \psi_1 A\, \Delta P\, e^{j\omega\tau} \frac{1-\varrho_{12}}{2} \frac{e^{\psi_1 s_1} - e^{-\psi_1 s_1}}{e^{\psi_1 s_1} - \varrho_{12} e^{-\psi_1 s_1}}.$$

IV. Membranschwingungen

Zur Berechnung der (bei gegebenen Druckschwankungen im Luftpolster) erforderlichen Schwingungen einer Kolbenmembran soll nun der erste Hauptsatz der Wärmelehre in der nachstehenden Form auf das gesamte Luftpolster angewendet werden, wobei jetzt die Veränderlichkeit der Spaltweite wesentlich ist.

$$dQ_1 = du_1 + A\,P\,dv_1.$$

Darin bedeutet:

Q_1 die Wärmemenge, die durch die Grenzflächen $x = \pm s_1$ je Gewichtseinheit Luft dem Spalt zugeführt wird (kcal/kg);

u_1 die innere Energie der Gewichtseinheit der Luft im ganzen Luftpolster (kcal/kg);

v_1 den zeitveränderlichen Mittelwert des spez. Volumens der Luft im Spalt (m³/kg).

Es ist nun:

$$dQ_1 = -2\,q_{+s_1}\frac{v_1}{2s}\,d\tau$$
$$du_1 = c_{v_1}\,d\vartheta_m$$
$$dv_1 = \left(\frac{v_1}{2s}\right) ds,$$

wobei

s die zeitveränderliche, halbe Spaltweite (m);

ϑ_m die mittlere, periodische Übertemperatur des Gases im Spalt (°C) und

c_{v_1} die spez. Wärme des Gases bei konstantem Volumen (kcal/kg °C)

ist.

Damit lautet der erste Hauptsatz der Wärmelehre für das gesamte Luftpolster:

$$(9) \qquad -q_{+s_1} = \frac{c_{v_1} s}{v_1}\frac{d\vartheta_m}{d\tau} + A\,\frac{P}{2}\frac{ds}{d\tau}.$$

Zur Berechnung des örtlichen Mittelwertes der Übertemperatur des Gases im Spalt kann (unter Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung) praktisch mit der mittleren Spaltweite $2s_1 = \text{konst.}$ gerechnet werden, solange die Membranausschläge klein gegenüber der jeweiligen Spaltweite sind. Man findet so:

$$\vartheta_m \cong \frac{1}{2s_1}\int_{-s_1}^{+s_1} \vartheta\,dx = \frac{A\,\Delta P\, e^{j\omega\tau}}{c_{p_1}\gamma_1}\left\{1 - \frac{1-\varrho_{12}}{2\psi_1 s_1}\frac{e^{\psi_1 s_1} - e^{-\psi_1 s_1}}{e^{\psi_1 s_1} - \varrho_{12} e^{-\psi_1 s_1}}\right\}.$$

Also wird:

$$\frac{d\vartheta_m}{d\tau} \cong \frac{j\omega A\,\Delta P\, e^{j\omega\tau}}{c_{p_1}\gamma_1}\left\{1 - \frac{1-\varrho_{12}}{2\psi_1 s_1}\frac{e^{\psi_1 s_1} - e^{-\psi_1 s_1}}{e^{\psi_1 s_1} - \varrho_{12} e^{-\psi_1 s_1}}\right\}.$$

Hieraus, sowie mit Hilfe von Gl. (8), ergibt sich dann für kleine Ausschläge mit $s \approx s_1$ und $P \approx P_0$ nach Gl. (9) die Geschwindigkeit der Membran zu:

$$(10) \quad \frac{ds}{d\tau} = -\frac{j\omega\, 2 s_1 \Delta P}{\varkappa P_0}\left\{1 + \frac{(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})}{2\psi_1 s_1}\frac{e^{\psi_1 s_1} - e^{-\psi_1 s_1}}{e^{\psi_1 s_1} - \varrho_{12} e^{-\psi_1 s_1}}\right\} e^{j\omega\tau}$$

mit $\varkappa = \dfrac{c_{p_1}}{c_{v_1}}$.

Die Membrangeschwindigkeit ändert sich also rein harmonisch mit der Schwingungszahl der Druckschwingung, jedoch mit frequenzabhängiger Schwingungsweite und Phasenlage gegenüber dieser.

Aus Gl. (10) ergibt sich durch Integration nach der Zeit der Weg der Membran zu:

$$(11) \quad s_1 - s = \frac{2 s_1 \Delta P\, e^{j\omega\tau}}{\varkappa P_0}\left\{1 + \frac{(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})}{2\psi_1 s_1}\frac{e^{\psi_1 s_1} - e^{-\psi_1 s_1}}{e^{\psi_1 s_1} - \varrho_{12} e^{-\psi_1 s_1}}\right\}.$$

Trägt man diese Abhängigkeit in Verbindung mit Gl. (2) in ein Druck-Weg-Diagramm ein, so erkennt man anschaulich den Kreisprozeß, den das Gas im Spalt infolge der Wärmeableitung der Wand durchlaufen muß. Man kann zeigen, daß alle zusammengehörigen Drücke und Wege praktisch auf einer Ellipse liegen, deren Halbachsen im wesentlichen von der Größe der Druckschwingung, der Spaltweite und der Frequenz der Schwingung abhängen. Die umschriebene Ellipsenfläche stellt dabei die Verlustarbeit für eine Schwingung dar. Für die später noch näher besprochenen, verlustfreien Grenzfälle (s. Abschnitt VI) wird diese Arbeitsfläche dadurch Null, daß die Ellipse in eine ihrer Achsen zusammenschrumpft.

Zerlegt man die Membrangeschwindigkeit u in zwei Komponenten, von denen die eine (u_W) in Phase mit der Druckschwingung im Luftpolster, die andere (u_B) aber um $\frac{\pi}{2}$ dagegen phasenverschoben ist, so erhält man durch Multiplikation der Beträge dieser Komponenten mit der Schwingungsweite ΔP der Druckschwingung jeweils die doppelte Wirk- bzw. Blindleistung der am Luftpolster wirkenden Kräfte. Diese stellt dabei die elastische, also reversible Schwingungsenergie, jene die in Wärme verwandelte Verlustenergie je Zeit und Flächeneinheit der Membran dar. Ihre Ermittlung ist im vorliegenden Fall bedeutungslos und soll daher in diesem Zusammenhang nicht erfolgen.

V. Schwingungseigenschaften des Luftpolsters

Da sich die vorausgehenden Rechnungen ausschließlich auf Eigenschaften des masselos gedachten Luftpolsters beziehen, sind die vorstehenden Ergebnisse mit Zwangsschwingungen eines Systems zu vergleichen, das nur Dämpfung und elastische Rückführung aufweist. In üblicher Darstellung lautet dann die Differentialgleichung für die Zwangsschwingungen dieses gedachten Systems unter dem Einfluß von harmonischen Druckschwankungen wie folgt:

$$K\frac{dx}{d\tau}+Cx=-\Delta P e^{j\omega\tau}. \tag{12}$$

Hierin ist:

x der Weg der gedachten, masselosen Kolben-Membran (m);
K die Dämpfungskonstante dieser Kolben-Membran je Flächeneinheit (kg sec/m³);
C die elastische Konstante dieser Kolben-Membran je Flächeneinheit (kg/m³).

Die Lösung für quasistationäre, rein harmonische Zwangsschwingungen lautet dann:

$$x_0-x=\frac{\Delta P e^{j\omega\tau}}{C+jK\omega}. \tag{13}$$

Diese Beziehung ist unmittelbar mit Gl. (11) zu vergleichen, wobei $x_0-x=s_1-s$ zu setzen ist. Man erhält also zur Berechnung der Systemgrößen C und K die nachstehende komplexe Beziehung:

$$\frac{1}{C+jK\omega}=\frac{2s_1}{\varkappa P_0}\left\{1+\frac{(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})}{2\varphi_1 s_1}\,\frac{e^{\varphi_1 s_1}-e^{-\varphi_1 s_1}}{e^{\varphi_1 s_1}-\varrho_{12}e^{-\varphi_1 s_1}}\right\}. \tag{14}$$

Für den praktisch wichtigen Sonderfall $\varrho_{12}=-1$ findet man

$$\frac{1}{C+jK\omega}=\frac{2s_1}{\varkappa P_0}\left\{1+\frac{\varkappa-1}{\varphi_1 s_1}\,\mathfrak{Tg}(\varphi_1 s_1)\right\}. \tag{14a}$$

Aus der Gleichheit der Argumente ergibt sich zunächst nach Gl. (14):

$$\left[\frac{K\omega}{C}\right]=\frac{(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})\{2\,\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 s_1-(1-\varrho_{12})\sin 2\varphi_1 s_1-(1+\varrho_{12})[\cos 2\varphi_1 s_1-e^{-2\varphi_1 s_1}]\}}{4\varphi_1 s_1[2\,\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 s_1-2\varrho_{12}\cos 2\varphi_1 s_1-(1-\varrho_{12}^2)e^{-2\varphi_1 s_1}]+(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})\cdot Z} \tag{15}$$

wenn $\varphi_1=\sqrt{\frac{\omega}{2a_1}}$ und $Z=[2\,\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 s_1+(1-\varrho_{12})\sin 2\varphi_1 s_1-(1+\varrho_{12})(\cos 2\varphi_1 s_1-e^{-2\varphi_1 s_1})]$ ist.

Für den praktisch wichtigen Sonderfall $\varrho_{12}=-1$ findet man ferner die nachstehende vereinfachte Beziehung:

$$\left[\frac{K\omega}{C}\right]_{\varrho_{12}=-1}=\frac{(\varkappa-1)[\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 s_1-\sin 2\varphi_1 s_1]}{2\varphi_1 s_1(\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 s_1+\cos 2\varphi_1 s_1)+(\varkappa-1)(\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 s_1+\sin 2\varphi_1 s_1)}. \tag{15a}$$

Diese dimensionslose Größe $\left(\frac{K\omega}{C}\right)$[9]) eignet sich besonders zur Veranschaulichung der Abhängigkeit des Verhältnisses K/C von der Spaltweite und Temperaturleitzahl des Gases im Spalt bei unveränderlicher Frequenz. Darüber hinaus stellt sie physikalisch unmittelbar das Verhältnis der an der Membran wirksamen, dämpfenden Kräfte zu den elastischen Kräften des Luftpolsters dar. Zur anschaulichen

[9]) Bei schwach gedämpften Eigenschwingungen eines Systems mit der Kreisfrequenz ω stellt $\pi\cdot\frac{K\omega}{C}$ das logarithmische Dekrement derselben, d. h. also den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Schwingungsweiten dar.

Darstellung der Frequenzabhängigkeit von K/C ist die nachstehende, ebenfalls dimensionslose Form besser geeignet:

$$\left[\frac{K a_1}{C (2 s_1)^2}\right]_{\varrho_{12}=-1} = \frac{(\varkappa-1)\,[\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 s_1 - \sin 2\varphi_1 s_1]}{2\,(2\varphi_1 s_1)^2\,[(2\varphi_1 s_1)(\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 s_1 + \cos 2\varphi_1 s_1) + (\varkappa-1)(\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 s_1 + \sin 2\varphi_1 s_1)]}. \tag{15b}$$

In den Abb. 2 und 3 sind diese Zusammenhänge für $\varrho_{12} = -1$ anschaulich dargestellt. Man erkennt zunächst aus Abb. 2, daß das Verhältnis K/C bei einer bestimmten Frequenz mit wachsendem $(s_1/\sqrt{a_1})$ von Null ausgehend über einen Größtwert asymptotisch wieder gegen Null geht. Für Werte von $2\varphi_1 s_1 > 7{,}0$ nähert sich K/C praktisch nach einer einfachen Hyperbel dem Wert Null.

Nach Gl. (15) bzw. Gl. (17b) findet man, daß K/C für genügend kleine Frequenzen — entsprechend kleinen Werten von $\varphi_1 s_1$ — im allgemeinsten Fall ($\varrho_{12} \neq -1$) theoretisch sehr große Werte annehmen kann[10]). Für wachsende Frequenz nähert sich K/C asymptotisch dem Wert Null.

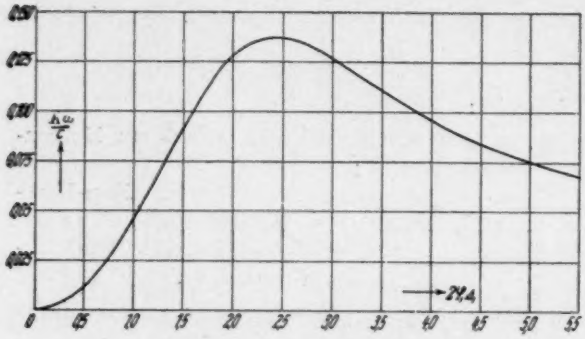

Abb. 2. Verhältnis der an der Membran wirkenden, thermischen Dämpfungskräfte zu den elastischen Kräften des Luftpolsters ($K\omega/C$) in Abhängigkeit von seiner dimensionslosen Kenngröße: $2\varphi_1 s_1 = 2 s_1 \sqrt{\dfrac{\omega}{2 a_1}}$

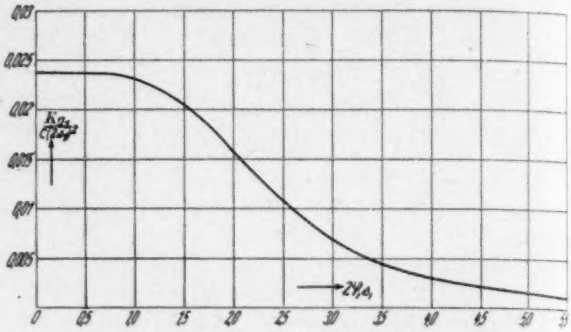

Abb. 3. Abhängigkeit des dimensionslosen Verhältnisses $\left[\dfrac{K a_1}{C (2 s_1)^2}\right]$ von der dimensionslosen Kenngröße $2\varphi_1 s_1 = 2 s_1 \sqrt{\dfrac{\omega}{2 a_1}}$

Berechnet man aus den von W. ERNSTHAUSEN[11]) gemessenen Frequenzkurven von Kondensatormikrophonen die entsprechenden Werte $K\omega/C$ der Gesamtdämpfung in Abhängigkeit von den zugehörigen Werten von $2\varphi_1 s_1$ mit vereinfachenden, physikalisch zulässigen Voraussetzungen, so ergeben sich Werte, die um eine Größenordnung über den hier berechneten Werten der thermischen Dämpfung liegen. Dies bedeutet entweder, daß die praktisch meßbare Gesamtdämpfung von Kondensatormikrophonen in der Hauptsache auf die eingangs schon angeführte Strömungsdämpfung zurückzuführen ist oder, daß auch die thermische Dämpfung durch das Auftreten turbulenter Strömungen in ihrer Wirkung gesteigert ist.

Aus der Gleichheit der absoluten Beträge ergibt sich nach Gl. (14) eine zweite reelle Beziehung für C und K. Man findet zunächst allgemein:

$$\frac{1}{C^2 + (K\omega)^2} = \left(\frac{2 s_1}{\varkappa P_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{(\varkappa-1)^2 (1-\varrho_{12}^2)}{(2\varphi_1 s_1)^2} \frac{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 s_1 - \cos 2\varphi_1 s_1}{2\,\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 s_1 - 2\varrho_{12}\cos 2\varphi_1 s_1 - (1-\varrho_{12}^2)\,e^{-2\varphi_1 s_1}}\right.$$
$$\left. + \frac{(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})}{2\varphi_1 s_1} \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 s_1 + (1-\varrho_{12})\sin 2\varphi_1 s_1 + (1+\varrho_{12})\,[e^{-2\varphi_1 s_1} - \cos 2\varphi_1 s_1]}{2\,\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 s_1 - 2\varrho_{12}\cos 2\varphi_1 s_1 - (1-\varrho_{12}^2)\,e^{-2\varphi_1 s_1}}\right\}. \tag{16}$$

Im Grenzfall $\varrho_{12} = -1$ erhält man also:

$$\text{In.}\quad \left[\left(\frac{\varkappa P_0}{C 2 s_1}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{K\omega}{C}\right)^2}\right]_{\varrho=-1} = 1 + \frac{\varkappa-1}{\varphi_1 s_1}\frac{\mathfrak{Sin}\,2\varphi_1 s_1 + \sin 2\varphi_1 s_1}{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 s_1 + \cos 2\varphi_1 s_1} + \frac{(\varkappa-1)^2}{2(\varphi_1 s_1)^2}\frac{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 s_1 - \cos 2\varphi_1 s_1}{\mathfrak{Cof}\,2\varphi_1 s_1 + \cos 2\varphi_1 s_1}. \tag{16a}$$

[10]) Für äußerst kleine Werte der Spaltweite besteht als untere Grenze die Größenordnung der freien Weglänge der Moleküle; die Entwicklungen gelten dann wegen der Unstetigkeit der Materie nicht mehr.

[11]) W. ERNSTHAUSEN, a. a. O.

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit Gl. (15) und Gl. (15a) bzw. Abb. 2 die Abhängigkeit der elastischen Eigenschaften des Luftpolsters vor allem von der Frequenz unter Berücksichtigung der endlichen Wärmeabfuhr durch die Begrenzungswände des Spaltes.

In Abb. 4 ist als dimensionslose, elastische Kenngröße des Spaltes das Verhältnis $(C\,2\,s_1/\varkappa\,P_0)$ in Abhängigkeit von $2\varphi_1 s_1$ dargestellt. Diese Kenngröße gibt physikalisch anschaulich das Verhältnis der elastischen Eigenschaft eines technischen Luftpolsters zu der eines vollkommen wärmeisolierten idealen Luftpolsters an. Man erkennt, daß unter dem Einfluß der äußeren Wärmeableitung die elastische Konstante des Luftpolsters nicht mehr unabhängig von der Frequenz der erzwungenen Schwingungen ist. Sie ist stets kleiner als der Grenzwert für rein adiabatische Verdichtung, aber auch immer größer als jener für rein isotherme Verdichtung. Da das Verhältnis beider Grenzwerte $C_{ad}/C_{is}=\varkappa$ ist, ergibt sich — wie auch zu erwarten war — hierdurch praktisch keine große Veränderlichkeit der elastischen Eigenschaften des Gaspolsters. Für genaue meßtechnische Untersuchungen kann sich aber auch die Berücksichtigung dieser Veränderlichkeit — vor allem bei statischer Eichung — als notwendig erweisen.

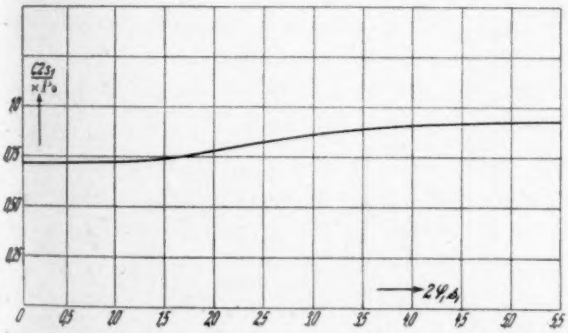

Abb. 4. Abhängigkeit der dimensionslosen, elastischen Kenngröße $(C\,2\,s_1/\varkappa\,P_0)$ des Spaltes von seiner dimensionslosen Kenngröße $2\,\varphi_1 s_1 = 2\,s_1\sqrt{\frac{\omega}{2a_1}}$

Vergleicht man die von W. ERNSTHAUSEN[11]) untersuchten, verschiedenartigen Elektroden, so findet man unter Verwendung des charakteristischen d-Wertes für die beiden Extremfälle in erster Näherung Werte von $2\varphi_1 s_1 \leq 1$ bzw. $2\varphi_1 s_1 \leq 30$; dies bedeutet nach Abb. 4, daß man im ersten Fall praktisch im isothermen Bereich mit geringer Änderung der elastischen Eigenschaft des Luftspaltes, im zweiten Fall aber näherungsweise bis zu adiabatischer Verdichtung im Luftpolster mit entsprechend größeren Änderungen seiner elastischen Eigenschaften rechnen muß.

Nachdem sich nun vorausgehend zeigte, daß die elastische Größe C eines gegebenen Spaltes praktisch wenig veränderlich ist, kann man die Abhängigkeit der Dämpfungsgröße K des Luftspaltes nach Gl. (15) bis (15b) in Verbindung mit Abb. 4 ohne weiteres übersehen. Man erkennt, daß K im allgemeinen $(\varrho_{12} \neq -1)$ für sehr kleine Frequenzen theoretisch auch sehr große Werte annehmen kann. Mit wachsenden Schwingungszahlen strebt es aber immer asymptotisch dem Wert Null zu.

VII. Grenzfälle, Zahlenbeispiele und Schlußbetrachtungen

Als Grenzfälle interessieren vor allem die Spalteigenschaften bei sehr kleinen Schwingungszahlen entsprechend sehr kleinen Werten von $\varphi_1 s_1$. Nach Gl. (15) findet man dafür:

$$\text{(17a)} \qquad \left[\frac{K\omega}{C}\right]_{\substack{\varrho_{12}\neq -1\\ \varphi_1 s_1 \ll 1}} \cong \frac{(\varkappa-1)\left[(1+\varrho_{12})\,2\varphi_1 s_1 + \frac{1}{3}(1-\varrho_{12})(2\varphi_1 s_1)^2\right]}{2\varkappa(1-\varrho_{12}) + 2\varphi_1 s_1 [1+\varrho_{12}]\cdot(\varkappa-1)}$$

bzw.

$$\text{(17b)} \qquad \left[\frac{K a_1}{C(2s_1)^2}\right]_{\substack{\varrho_{12}\neq -1\\ \varphi_1 s_1 \ll 1}} \cong \frac{\varkappa-1}{4\varphi_1 s_1}\cdot\frac{1+\varrho_{12}+\frac{1}{3}(1-\varrho_{12})\,2\varphi_1 s_1}{2(1-\varrho_{12})\varkappa + 2\varphi_1 s_1[1+\varrho_{12}]\cdot(\varkappa-1)}.$$

Insbesondere erhält man für $\varrho_{12}=-1$ bei genügend kleinen Werten von $\varphi_1 s_1$ nach Gl. (15a) bzw. Gl. (15b) oder Gl. (17a) bzw. Gl. (17b):

$$\text{(17c)} \qquad \left[\frac{K\omega}{C}\right]_{\substack{\varrho_{12}=-1\\ \varphi_1 s_1 \ll 1}} \cong \frac{(\varkappa-1)(2\varphi_1 s_1)^2}{6\varkappa}$$

und

$$\text{(17d)} \qquad \left[\frac{K a_1}{C(2s_1)^2}\right]_{\substack{\varrho_{12}=-1\\ \varphi_1 s_1 \ll 1}} \cong \frac{\varkappa-1}{12\varkappa}.$$

Aus Gl. (17a) bzw. Gl. (17c) ist zu erkennen, daß das Verhältnis der thermischen Dämpfungskräfte im Vergleich zu den elastischen Kräften des Luftpolsters für entsprechend kleine Werte von $\varphi_1 s_1$ beliebig klein wird. Aus Gl. (17b) ergibt sich, daß aber trotzdem die Dämpfungskonstante K theoretisch sehr große Werte annehmen kann, da C stets endlich ist. Infolge der endlichen Dicke der Begrenzungswände des Luftspaltes kann aber K praktisch nie unendlich groß werden; in diesem Falle gelten die Voraussetzungen dieser Rechnung nicht mehr. Die Berücksichtigung der endlichen

Stärke der Begrenzungswände bei sehr kleinen Frequenzen ist rechnerisch zwar ohne besondere Schwierigkeit möglich, hat aber praktisch für die Akustik keine Bedeutung. Man kann mit ausreichender Genauigkeit in derartigen Fällen mit $\varrho_{12} = -1$ nach Gl. (17d) rechnen.

Für genügend kleine Werte von $\varphi_1 s_1$ findet man ferner unabhängig von ϱ_{12} nach Gl. (16):

$$(18a) \qquad C_{\varphi_1 s_1 \ll 1} \cong \frac{P_0}{2 s_1} \sqrt{1 + \left(\frac{K\omega}{C}\right)^2} \cong \frac{P_0}{2 s_1} = C_{is}.$$

Dies ist der Grenzwert der elastischen Konstante des Spaltes für rein isotherme Verdichtung.

Für sehr große Werte von $\varphi_1 s_1$ findet man andererseits nach Gl. (16):

$$(18b) \quad C_{\varphi_1 s_1 \gg 1} \cong \frac{\varkappa P_0}{2 s_1} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{K\omega}{C}\right)^2}}{1 + \frac{(\varkappa - 1)(1 - \varrho_{12})}{2 \varphi_1 s_1}} \approx \frac{\varkappa P_0}{2 s_1} = C_{ad}.$$

Dies ist der Grenzwert der elastischen Konstante des Spaltes für rein adiabatische Verdichtung. Zwischen C_{is} und C_{ad} liegen alle sonst möglichen Werte dieser elastischen Spaltgröße.

Nach Gl. (15) erhält man außerdem für sehr große Werte von $\varphi_1 s_1$:

$$(19) \qquad \left[\frac{K\omega}{C}\right]_{\varphi_1 s_1 \gg 1} \cong \frac{(\varkappa - 1)(1 - \varrho_{12})}{4 \varphi_1 s_1 + (\varkappa - 1)(1 - \varrho_{12})}.$$

Die rein thermisch bedingten Dämpfungskräfte und die Dämpfungskonstante K des Luftspaltes gehen also mit wachsenden Werten von $\varphi_1 s_1$ asymptotisch gegen Null.

Zur Beurteilung der Größenordnung der Reflexionszahl sollen noch die folgenden Zahlenwerte dienen. Für Luft von 1 ata und 15° C ist die Wärmebelastungszahl

$$b_1 = 0{,}076 \ (\mathrm{kcal/m^2\,h^{1/2}\,^0C})$$

und für Eisen wird

$$b_2 = \sim 200 \ (\mathrm{kcal/m^2\,h^{1/2}\,^0C}).$$

Daher wird die Reflexionszahl für Temperatur-Wärme-Schwingungen zwischen dem Luftpolster und der begrenzenden Eisenwand

$$\varrho_{12} = \frac{0{,}076 - 200}{0{,}076 + 200} = -1 + 0{,}00076.$$

Da auch die Wärmebelastungszahlen von anderen Gasen und Metallen von ähnlicher Größenordnung sind wie die von Luft und Eisen, so ergibt sich daraus, daß die Reflexionszahl praktisch stets zu $\varrho_{12} = -1$ angenommen werden darf.

Gegeben sei z. B. eine Spaltweite von $2 s_1 = {}^1/_{10}$ mm; die Luft im Spalt besitzt bei Atmosphärendruck und Zimmertemperatur eine Temperaturleitzahl von etwa $a_1 \cong 0{,}194$ (cm²/sec). Die Schwingungseigenschaften dieses Luftspaltes sind bei einer Frequenz von 3000 Hz gesucht.

Man findet zunächst $2 \varphi_1 s_1 \cong 2{,}2$. Nach Abb. 3 ergibt sich damit $[K a_1/C (2 s_1)^2] \cong 0{,}0138$ und hieraus erhält man $K/C = 0{,}713 \cdot 10^{-5}$ sec. Zur Beurteilung der Wirksamkeit der thermischen Dämpfung ist das Verhältnis $(K\omega/C)$ besser geeignet. Man findet hierfür nach Abb. 2: $(K\omega/C) = 0{,}134$; d. h. also, die an der Membran wirkenden, thermisch dämpfenden Kräfte des Luftpolsters betragen 13,4 % seiner elastischen Kräfte[12]). Schließlich findet man nach Abb. 4 die elastische Kenngröße des Luftpolsters zu $(C 2 s_1/\varkappa P_0) = 0{,}79$, d. h. also, die elastische Größe des Luftpolsters beträgt nur das 0,79fache eines vollkommen wärmeisolierten Spaltes.

Beachtet man bei der Beurteilung dieser Ergebnisse, daß sich die gleichen Zahlenwerte für entsprechend höhere Frequenzen ergeben, wenn die Spaltweite geringer wird, so erkennt man, daß gerade diese thermisch bedingten Änderungen der Schwingungseigenschaften des Luftspaltes in das technische Anwendungsgebiet fallen. Obwohl dabei die Auswirkungen beschränkt sind, so ergeben sich doch für genauere Untersuchungen noch technisch beachtliche Fehlermöglichkeiten.

Die Übertragung der vorstehenden, zunächst für eine Kolbenmembran entwickelten Ergebnisse auf gewöhnliche am Rand eingespannte Membranen bietet praktisch keine Schwierigkeiten, solange die Durchbiegungen — wie beim Mikrophon — genügend klein sind. Dagegen kann über das thermische Verhalten eines Luftpolsters, in dem turbulente Strömungen bestehen, auf Grund der vorliegenden Betrachtungen nur eine größenordnungsmäßige Aussage gemacht werden[13]). Ihre genauere, rech-

[12]) Diesem Werte $K\omega/C = 0{,}134$ würde also bei entsprechenden Eigenschwingungen ein logarithmisches Dekrement von etwa 0,42 entsprechen.

[13]) Vgl. auch S. BALLANTINE, Technique of Mikrophone Calibration, J. Acous. Soc. Am. Vol. III (1931/32) S. 319, insbes. Note 2, S. 357.

nungsmäßige Erfassung soll einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Ganz entsprechende Überlegungen, wie sie vorausgehend für Luftspalte von Mikrophonen angestellt wurden, führen auch zur rechnerischen Erfassung der thermischen Dämpfung von Schallwellen in engen Spalten bzw. Kanälen. Außerdem lassen sich die vorstehenden Betrachtungen aber auch zur rohen Abschätzung des Einflusses der Verdichtung auf die periodische Wärmeübertragung in Kolbenmaschinen[14]) — insbesondere in Verbrennungskraftmaschinen — übertragen. Auch diese Verhältnisse sollen in einer besonderen Arbeit dargestellt werden[15]).

Zusammenfassung

Auf Grund einer allgemeinen Betrachtung wird zunächst die zeitliche und örtliche Abhängigkeit der Verdichtungswärme eines Gases bei gleichzeitig örtlich verschiedener Wärmeableitung untersucht. Unter Berücksichtigung der endlichen Wärmeleitfähigkeit der Baustoffe eines Mikrophons werden dann mit physikalisch zulässigen, den Rechnungsgang vereinfachenden Annahmen die Temperaturfelder im Gasraum und den anschließenden Wänden für periodische Druckschwankungen berechnet. Diese ermöglichen die Bestimmung der dem Luftpolster durch die Wände entzogenen bzw. zugeführten Wärme und erlauben so auf Grund des ersten Hauptsatzes der Wärmelehre die Ermittlung der Zusammenhänge zwischen dem Druck im Spalt und dem hierzu notwendigen Hub einer Kolbenmembran nach ihrer gegenseitigen Größe und Phasenlage. Ein Vergleich dieser Zusammenhänge mit den Zwangsschwingungen eines gedämpften, elastischen, aber trägheitsfreien Systems führt schließlich auf die gesuchte Abhängigkeit der Schwingungseigenschaften des Luftspaltes. Es zeigt sich dabei, daß ihre größte Veränderlichkeit bei den üblichen Abmessungen von Luftspalten in das technische Anwendungsgebiet von Mikrophonmembranen fällt. Die Größenordnung der unter dem Einfluß einer endlichen Wärmeleitfähigkeit der Baustoffe überhaupt möglichen, größten Änderungen, bezogen auf einen absolut wärmeisolierten Luftspalt, beträgt für die elastische Größe des Luftspaltes etwa 30 %. Die thermischen Dämpfungskräfte des Spaltes liegen dabei zwischen 0 und 14 % der elastischen Kräfte des Luftpolsters. Für ihre zahlenmäßig einfache Bestimmung in jedem besonderen Fall wurden Kurvenbilder in dimensionsloser Darstellung berechnet. Ein Vergleich mit der aus praktischen Messungen von W. Ernsthausen berechenbaren Gesamtdämpfung von Kondensatormikrophonen zeigt, daß die vorstehend bestimmte, thermische Dämpfung nur einen Bruchteil der Gesamtdämpfung darstellt. *(Eingegangen am 7. November 1939.)*

[14]) Vgl. H. Pfriem, Probleme der periodischen Wärmeübertragung mit Bezug auf Kolbenmaschinen. Forsch. Ing.-Wes. 10 (1939), S. 27.

[15]) H. Pfriem, Der periodische Wärmeübergang bei kleinen periodischen Druckschwankungen, und Der stationäre . . . . . ., Forsch. Ing.-Wes. 11 (1940) H. 2 und H. 3.

PATENTSCHAU

Bearbeitet von Heinrich Kösters

145.

Deutsches Patent Nr. 685366, patentiert ab 16. 5. 1933, ausgegeben am 19. 12. 1939

Siegfried Meyer in Berlin

Musikinstrument mit Tonerzeugung auf elektrischem Wege

Bei elektrischen Musikinstrumenten wird gewöhnlich aus einem stark obertonhaltigen Klang der gewünschte Klang herausgesiebt. Bei diesem Verfahren soll es bisweilen schwierig sein, Klänge mit ausgesprochenem Metallcharakter zu erzeugen. Es wird deshalb vorgeschlagen, in den Übertragungsweg einen mechanischen Tonerzeuger — etwa eine kleine schwingende Metallplatte — einzuschalten, deren Schwingungen elektromagnetisch oder auf einem ähnlichen Wege abgetastet werden.